

平成30年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理, 薬, 工, 医保健(放射線, 検査)) 平成30年2月25日

- 1 t を実数とする。空間の4点 $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$, $D(1, 6, 1)$ について, $\angle BAC$ が直角であるとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) t の値を求めよ。
- (2) D から A, B, C を通る平面に垂線を下ろし, A, B, C を通る平面との交点を H とする。 \overrightarrow{HD} を求めよ。
- (3) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

- 2 初項が1である数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく。 $\{S_n\}$ が

$$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \quad (n \geq 1)$$

をみたすとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3 を求めよ。
 - (2) $n \geq 2$ のとき, a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ。
 - (3) $n \geq 2$ のとき, a_n を n の式で表せ。
- 3 n を2以上の自然数とする。区間 $[0, 1]$ を n 等分して, その両端を順に $0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 1$ とする。関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0, b \geq 0, c > 0$) に対して, 区間 $[x_{k-1}, x_k]$ を底辺とし, 高さが $f(x_k)$ である長方形の面積を L_k とする。ただし, $k = 1, 2, \dots, n$ である。すべての n に対して $L_1 + L_n = \frac{10}{n} + \frac{8}{n^3}$ であるとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kL_k$ を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 L_k$ を求めよ。

- 4 $-3 \leq x \leq 0$ に対して, $F(x) = \int_x^{x+3} \sqrt{3t^2 + t^3} dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $-3 < x < 0$ に対して, $F'(x) = 0$ の解を求めよ。
- (2) $F(x)$ の最小値を求めよ。

解答例

- 1 (1) $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$ より

$$\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (t-1, 2t-5, t-1)$$

$\angle BAC = 90^\circ$ のとき, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ であるから

$$3(t-1) - 3(2t-5) + 0(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 4$$

- (2) (1) の結果から $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$

$$\overrightarrow{AD} = (1, 6, 1) - (1, 5, 0) = (0, 1, 1)$$

\overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (1, 1, -2)$$

とおくと, $\overrightarrow{DH} = k\vec{n}$ であるから (k は実数), $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}$ より

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} + k\vec{n}$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AH} \text{ であるから} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = k|\vec{n}|^2$$

$$\text{したがって} \quad -1 = 6k \quad \text{ゆえに} \quad k = -\frac{1}{6}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{HD} = -\frac{1}{6}\vec{n} = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

別解 (1) の結果から $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$

$\vec{e}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, $\vec{e}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ とおくと, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HD} &= \overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{AD} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\overrightarrow{AD} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 \\ &= \overrightarrow{AD} - \frac{(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB})}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} - \frac{(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AC}|^2} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AD} = (1, 6, 1) - (1, 5, 0) = (0, 1, 1) \text{ より } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$$

また, $|\overrightarrow{AB}|^2 = 18$, $|\overrightarrow{AC}|^2 = 27$ であるから

$$\overrightarrow{HD} = (0, 1, 1) + \frac{1}{6}(3, -3, 0) - \frac{2}{9}(3, 3, 3) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

(3) よって、求める四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle ABC \cdot |\overrightarrow{HD}| &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{HD}| \\ &= \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

別解 D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを h , $\vec{e} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ とおくと

$$h = |\overrightarrow{AD} \cdot \vec{e}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって、求める四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle ABC \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| h = \frac{3}{2}$$

補足 2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき、
ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

は、 \vec{a} および \vec{b} に直交する。このベクトルを、 \vec{a} と \vec{b} のベクトル積と言い、 $\vec{a} \times \vec{b}$ で表す¹。本題において、 $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$ より

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-9, -9, 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$$

であるから、 $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 1)$ より

$$V = \frac{1}{6} |9| = \frac{3}{2}$$

ベクトル積 (外積) は高校数学の範囲外であるが、検算として利用できる。

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

2 (1) $S_1 = a_1 = 1, S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \cdots (*)$

(*) に $n = 1, 2$ を代入すると

$$S_2 = 2S_1 + 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$S_3 = 2S_2 + 2^2 + 2 \cdot 2 = 18$$

よって $a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 1 = \mathbf{4}, \quad a_3 = S_3 - S_2 = 18 - 5 = \mathbf{13}$

(2) (*) より $S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n$
 $S_n = 2S_{n-1} + (n-1)^2 + 2(n-1)$

上の 2 式の辺々を引くと $\mathbf{a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1}$

(3) 1 次関数 $f(n) = pn + q$ が, すべての n について, 次式を満たすとき

$$f(n+1) = 2f(n) + 2n + 1 \cdots \textcircled{1}$$

したがって $p(n+1) + q = 2(pn + q) + 2n + 1$

整理すると $pn + p + q = (2p + 2)n + 2q + 1$

上式は, n に関する恒等式であるから

$$p = 2p + 2, \quad p + q = 2q + 1 \quad \text{これを解いて} \quad p = -2, \quad q = -3$$

ゆえに $f(n) = -2n - 3 \cdots \textcircled{2}$

(2) の結果と ① の辺々を引くと

$$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$$

$f(2) = -2 \cdot 2 - 3 = -7$ であるから, $a_2 - f(2) = 4 - (-7) = 11$ より

$$a_n - f(n) = 11 \cdot 2^{n-2} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = 11 \cdot 2^{n-2} + f(n)$$

これに ② を代入して $\mathbf{a_n = 11 \cdot 2^{n-2} - 2n - 3} \quad (n \geq 2)$

3 (1) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x_k = \frac{k}{n}$, $L_k = \frac{1}{n}f(x_k)$ より

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left\{a\left(\frac{1}{n}\right)^2 + b\left(\frac{1}{n}\right) + c\right\} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{a}{n^2} + \frac{b}{n} + c\right), \\ L_n &= \frac{1}{n}f(1) = \frac{1}{n}(a + b + c) \end{aligned}$$

したがって $L_1 + L_n = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{n^2} + \frac{b}{n} + a + b + 2c\right)$

条件式から $L_1 + L_n = \frac{1}{n}\left(\frac{8}{n^2} + 10\right)$

上の2式から $\mathbf{a = 8}$, $\mathbf{b = 0}$, $a + b + 2c = 10$ ゆえに $\mathbf{c = 1}$

(2) $kL_k = k \cdot \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \cdots (*)$

(1)の結果より, $f(x) = 8x^2 + 1$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kL_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 xf(x) dx \\ &= \int_0^1 x(8x^2 + 1) dx = \left[2x^4 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \mathbf{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

(3) (*) に $\frac{k}{n}$ を掛けると $\frac{k^2}{n}L_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 L_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} L_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2(8x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{8}{5}x^5 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \mathbf{\frac{29}{15}} \end{aligned}$$

□4 (1) $f(t) = \sqrt{3t^2 + t^3}$ とおくと, $F(x) = \int_x^{x+3} f(t) dt$ より $(-3 \leq x \leq 0)$

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x+3) - f(x) = \frac{\{f(x+3)\}^2 - \{f(x)\}^2}{f(x+3) + f(x)} \\ &= \frac{3(x+3)^2 + (x+3)^3 - (3x^2 + x^3)}{f(x+3) + f(x)} = \frac{9(x+3)(x+2)}{f(x+3) + f(x)} \end{aligned}$$

よって, $-3 < x < 0$ における $F'(x) = 0$ の解は $x = -2$

(2) (1) で求めた $F'(x)$ により, $F(x)$ の増減表は次のようになる.

| | | | | | |
|---------|------|------------|------|------------|-----|
| x | -3 | \cdots | -2 | \cdots | 0 |
| $F'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $F(x)$ | | \searrow | 極小 | \nearrow | |

$f(x) = |x|\sqrt{x+3}$, $-3 \leq x \leq 0$ に注意して, $F(x)$ を求める.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{x+3} f(t) dt \\ &= \int_0^x t\sqrt{t+3} dt + \int_0^{x+3} t\sqrt{t+3} dt \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{まず} \quad \int_0^x t\sqrt{t+3} dt &= \int_0^x \{(t+3)^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{t+3}\} dt \\ &= \left[\frac{2}{5}(t+3)^{\frac{5}{2}} - 2(t+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x \\ &= \left[\frac{2}{5}(t-2)(t+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x \\ &= \frac{2}{5}(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{5}\sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ② より

$$F(x) = \frac{2}{5}\{(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + (x+1)(x+6)^{\frac{3}{2}}\} + \frac{24}{5}\sqrt{3}$$

増減表から, 求める最小値は

$$F(-2) = \frac{2}{5}(-4 - 4^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{24}{5}(\sqrt{3} - 1)$$