平成 30 年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

1 座標空間において，xy 平面上にある双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ のうち $x \geqq 1$ を満たす部分を C とする。また，z 軸上の点 A(0, 0, 1) を考える。点 P が C 上を動くとき，直線 AP と平面 $x = d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし，d は正の定数とする。

2 原点を中心とする半径 3 の半円 $C : x^2 + y^2 = 9$ ($y \geqq 0$) 上の 2 点 P と Q に対し，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく，かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき，線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。

(2) 点 P を $(-3,\ 0)$ に固定する。Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。

(3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

3 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ $p_n,\ q_n,\ r_n,\ s_n$ とする。$p_n,\ q_n,\ r_n,\ s_n$ を求めよ。

4 整数 $a,\ b$ は 3 の倍数ではないとし，

$$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。

(2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。

(3) $f(x) = 0$ を満たす有理数 x が存在するような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

5 α を複素数とする。等式

$$\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\overline{z} = 0$$

を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ C 上の点 P を $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,\ 0\right)$ とおく $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$. 直線 AP と平面 $x=d$ との交点を Q とすると，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(0,\ 0,\ 1)+k\left(\frac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,-1\right)\\&=\left(\frac{k}{\cos\theta},\ k\tan\theta,\ 1-k\right)\quad\cdots①\end{aligned}$$

点 Q の x 座標が d であるから

$$\frac{k}{\cos\theta}=d\quad\text{ゆえに}\quad k=d\cos\theta$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(d,\ d\sin\theta,\ 1-d\cos\theta)\\&=(d,\ 0,\ 1)+d(0,\ \sin\theta,-\cos\theta)\end{aligned}$$

ここで
$$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-\cos\theta=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(d,\ 0,\ 1)+d\left(0,\ \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

このとき，$-\pi<\theta-\dfrac{\pi}{2}<0$ であるから，求める軌跡は，

平面 $\boldsymbol{x=d}$ 上の点 $\boldsymbol{(d,\ 0,\ 1)}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{d}$ の円周上で $\boldsymbol{z<1}$.

別解 軌跡の方程式を，次のように表してもよい.

$$\begin{cases}x=d\\y^2+(z-1)^2=d^2\\z<1\end{cases}$$

双曲線の媒介変数表示

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$ により，

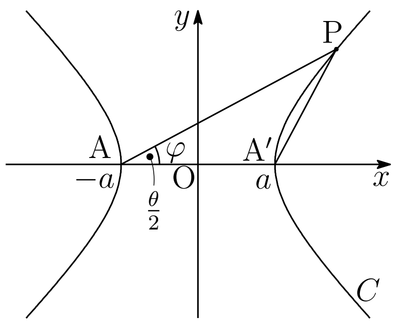
$$\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos\theta},\quad \frac{y}{b}=\tan\theta$$

とおくと，双曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，次のように媒介変数表示ができる．

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$$

とくに，$a=b$ のとき，直角双曲線となる．

直角双曲線 $C: x^2-y^2=a^2$ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，2 頂点を $\mathrm{A}(-a,\ 0)$，$\mathrm{A}'(a,0)$ とおく．



直線 AP の傾きを m，直線 A′P の傾きを m' とすると

$$m=\frac{y}{x+a},\quad m'=\frac{y}{x-a}\quad \text{ゆえに}\quad mm'=\frac{y^2}{x^2-a^2}=1$$

P は 2 直線 $\mathrm{AP}: y=m(x+a)$，$\mathrm{A'P}: y=\dfrac{1}{m}(x-a)$ の交点であるから

$$x=\frac{1+m^2}{1-m^2}a,\quad y=\frac{2m}{1-m^2}a$$

ここで，$m=\tan\varphi$ とおくと　$x=\dfrac{a}{\cos 2\varphi}$，$y=a\tan 2\varphi$

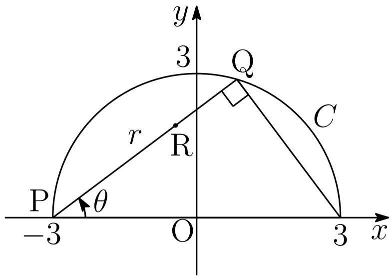
さらに，$\theta=2\varphi$ とおくことにより　$x=\dfrac{a}{\cos\theta}$，$y=a\tan\theta$

直角双曲線の漸近線が $y=x$ と $y=-x$ であるから，$0\leqq\theta<2\pi$，すなわち，$0\leqq\varphi<\pi$ において，$\varphi\neq\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$ である．$\varphi=\frac{\pi}{4}-0$ のとき P は第 1 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{\pi}{4}+0$ のとき P は第 3 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{3}{4}\pi-0$ のとき P は第 2 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{3}{4}\pi+0$ のとき P は第 4 象限の無限遠点にある．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy = \frac{1}{2}\pi\cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi$ であるから，$\mathrm{PR} = \dfrac{2}{3}\mathrm{PQ}$ より

$$S = \int_0^3 \mathrm{PR}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\pi = \boldsymbol{3\pi}$$

(2) $\theta = \angle\mathrm{OPQ}$，$r = \mathrm{PQ}$ とおくと $(r = 6\cos\theta)$



$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{9}{2}\pi$$

$\mathrm{PR} = \dfrac{2}{3}r$ より

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}r\right)^2 d\theta = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{2}\pi = \boldsymbol{2\pi}$$

(3) $C : x^2 + y^2 = 9\ (y \geqq 0)$ の第 1 象限と y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積は，半径 3 の半球の体積であるから

$$\pi\int_0^3 x^2\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = 18\pi$$

$\mathrm{P}(-x,\ y)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ を $2:1$ に内分する点は $\left(\dfrac{x}{3},\ y\right)$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

この点の軌跡は C の第 1 象限の部分を y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ だけ縮小したものであるから，図形 S と第 1 象限の共通部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi\int_0^3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 dy = \frac{1}{9}\pi\int_0^3 x^2\,dy = \frac{1}{9}\cdot 18\pi = 2\pi$$

$\mathrm{P}(-3,\ 0)$，$\mathrm{Q}(s,\ t)$ を $2:1$ に内分する点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると

$$x = \frac{2s-3}{3}s,\quad y = \frac{2t}{3}\quad \text{ゆえに}\quad s = \frac{3}{2}(x+1),\quad t = \frac{3}{2}y$$

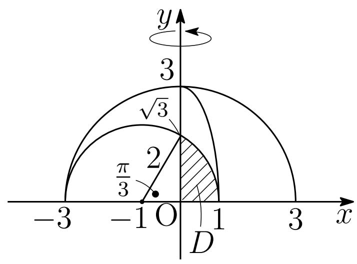
Q は C 上の点であるから $s^2 + t^2 = 9\ \ (t \geqq 0)$

これに上の結果を代入することにより，R の軌跡の方程式は

$$\frac{9}{4}(x+1)^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9\quad \text{ゆえに}\quad (x+1)^2 + y^2 = 4\ \ (y \geqq 0)\quad \cdots(*)$$

$(*)$ の y 軸との交点の y 座標は，$(*)$ に $x=0$ を代入して

$$y=\sqrt{3}$$



右の図の領域 D を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると

$$\begin{aligned}V_2&=\pi\int_0^{\sqrt{3}}x^2\,dy\\&=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy-2\pi\int_0^{\sqrt{3}}x\,dy\qquad\cdots(**)\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy=\int_0^{\sqrt{3}}(3-y^2)\,dy$

$$=\left[\,3y-\frac{1}{3}y^3\,\right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

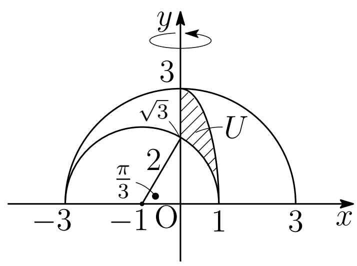
また，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}x\,dy$ は，D の面積であるから

$$\int_0^{\sqrt{3}}x\,dy=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これらを $(**)$ に代入すると

$$V_2=2\sqrt{3}\pi-2\pi\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

U の表す領域は右の図の斜線部分で，これを y 軸のまわりに1回転させた回転体の体積は

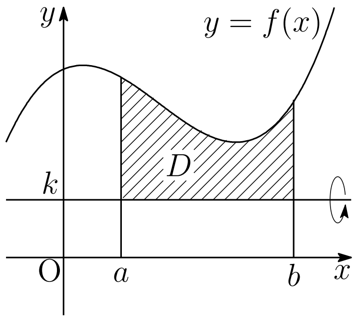


$$\begin{aligned}V_1-V_2&=2\pi-\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi\\&=\boldsymbol{\left(2-3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right)\pi}\end{aligned}$$

注意 $(**)$ の $\displaystyle\pi\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy$ は，D を直線 $x=-1$ のまわりに1回転させた回転体の体積を表す．

解説

$k>0$ とする．曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ が，区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq k$ であるとき，この区間において，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ で囲まれた領域 D を直線 $y=k$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V とすると

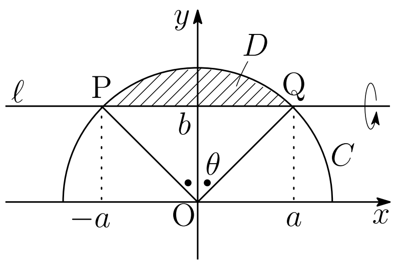


$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b (y-k)^2\,dy \\ &= \pi \int_a^b (y^2-k^2)\,dx - 2\pi k \int_a^b (y-k)\,dx \end{aligned}$$

D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_x，D の面積を S とすると

$$\boldsymbol{V = V_x - 2\pi k S}$$

半円 $C: x^2+y^2=a^2+b^2\ (y \geqq 0)$ と直線 $\ell: y=b\ (b \geqq 0)$ で囲まれた領域を D とする．D を ℓ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V，D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_x，D の面積を S とすると



$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} (y^2-b^2)\,dx = \pi \int_{-a}^{a} (a^2-x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi a^3$$

とくに，V_x は C の半径 r に関係なく a の値により決定する．

C と ℓ の 2 つの交点 P，Q に対し，$\angle\mathrm{POQ}=2\theta$，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=r$ とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2\cdot 2\theta - \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b = r^2\theta - ab, \\ V &= V_x - 2\pi b S = \frac{4}{3}\pi a^3 - 2\pi b(r^2\theta - ab) \\ &= 2\pi\left(\frac{2}{3}a^3 + ab^2 - br^2\theta\right) \end{aligned}$$

例えば，$C: x^2+y^2=4$，$\ell: y=1$ のとき，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$r=2$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ より

$$V = 2\left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

これは，前ページで求めた V_2 の 2 倍に等しい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 法 4 に関する 0，1，2，3 の積は，右のようになる．
したがって，次の確率漸化式が成立する．

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$p_1=q_1=r_1=s_1=\frac{1}{4}$$

$$p_{n+1}=p_n+\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}s_n \quad \cdots ①$$

$$q_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}s_n \quad \cdots ②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}s_n \quad \cdots ③$$

$$s_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}s_n \quad \cdots ④$$

$q_1=s_1=\dfrac{1}{4}$ および ②，④ より，$q_n=s_n$ であるから

$$q_1=\frac{1}{4},\quad q_{n+1}=\frac{1}{2}q_n \quad \text{ゆえに} \quad q_n=q_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n+1}}$$

したがって　$\boldsymbol{q_n=s_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}}$　これを ③ に代入すると

$$r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n+1}r_{n+1}=2^nr_n+\frac{1}{2}$$

数列 $\{2^nr_n\}$ は初項 $2r_1=\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$2^nr_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r^n=\frac{n}{2^{n+1}}}$$

$p_n+q_n+r_n+s_n=1$ であるから

$$\begin{aligned}p_n&=1-q_n-r_n-s_n\\&=1-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}=\boldsymbol{1-\frac{n+2}{2^{n+1}}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 整数 $a,\ b$ は 3 の倍数ではないから

$$a \equiv \pm 1,\ b \equiv \pm 1 \quad ゆえに \quad a^2 \equiv 1,\ b^2 \equiv 1 \pmod 3 \quad \cdots (*)$$

$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$ より，法 3 に関して

$$\begin{aligned} f(1) &= a^2 + 2b^2 + 3 \equiv 1 + 2\cdot 1 + 3 \equiv 0 && \pmod 3 \\ f(2) &= 4a^2 + 4b^2 + 17 \equiv 4\cdot 1 + 4\cdot 1 + 17 \equiv 1 && \pmod 3 \end{aligned}$$

よって，$f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りはそれぞれ **0** と **1**

(2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x が m であるとき

$$2m^3 + a^2m^2 + 2b^2m + 1 = 0$$

したがって　$m(2m^2 + a^2m + 2b^2) = -1$

上式より，次の (i), (ii) の場合分けができる．

(i) $m = 1,\ 2m^2 + a^2m + 2b^2 = -1$ のとき，
第 1 式を第 2 式を代入すると

$$2 + a^2 + 2b^2 = -1 \quad ゆえに \quad a^2 + 2b^2 = -3$$

$a^2 + 2b^2 \geqq 0$ であるから，不適．

(ii) $m = -1,\ 2m^2 + a^2m + 2b^2 = 1$ のとき，
第 1 式を第 2 式を代入すると

$$2 - a^2 + 2b^2 = 1 \quad ゆえに \quad -a^2 + 2b^2 = -1$$

$(*)$ より，$-a^2 + 2b^2 \equiv 1 \pmod 3$ であるから，不適．

(i), (ii) より，$f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しない．

補足 x を整数とするとき　$x + 3 \equiv x \pmod 3$
n を自然数とするとき　$(x+3)^n \equiv x^n \pmod 3$
ゆえに　$f(x+3) \equiv f(x) \pmod 3$
これと (1) の結果および $f(0) = 1$ から，$x \equiv 1$ (mod) が $f(x) = 0$ を満たす x であるための必要条件である．したがって，(2) は，(ii) の $m = 1$ の場合についてのみ調べればよい．

(3) $f(x)=0$ を満たす x は負である．(2) の結果に注意すると，$f(x)=0$ を満たす有理数 x は整数ではないから，x を $\dfrac{p}{q}$ とすると ($p,\ q$ は互いに素である整数，$p<0,\ q>1$)

$$
\begin{aligned}
2\left(\frac{p}{q}\right)^3+a^2\left(\frac{p}{q}\right)^2+2b^2\cdot\frac{p}{q}+1&=0\\
2p^3+a^2p^2q+2b^2pq^2+q^3&=0\\
\frac{2p^3}{q}+a^2p^2+2b^2pq+q^2&=0 \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

上式の $a^2p^2+2b^2pq+q^2$ が整数であるから，$\dfrac{2p^3}{q}$ は整数である．このとき，p と q は互いに素であるから ($q>1$)，$q=2$．これを ① に代入すると

$$p^3+a^2p^2+4b^2p+4=0 \quad ゆえに \quad p(p^2+a^2p+4b^2)=-4 \quad \cdots ②$$

負の整数 p は -4 の約数で，$q\ (=2)$ と互いに素であるから　$p=-1$

$p=-1$ を ② に代入すると

$$-(1-a^2+4b^2)=-4 \quad ゆえに \quad |a|^2-4|b|^2=-3$$

したがって　　$(|a|+2|b|)(|a|-2|b|)=-3$

$a,\ b$ は 3 の倍数でない整数であるから，$|a|+2|b|\geqq 3$ に注意すると

$$\begin{cases} |a|+2|b|=3 \\ |a|-2|b|=-1 \end{cases} \quad ゆえに \quad |a|=|b|=1$$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,-1),\ (-1,\ 1),\ (-1,-1)}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ より

$$\frac{\alpha}{2|\alpha|^2+1}+\frac{\overline{z}i}{|z|^2+2}=0 \quad ゆえに \quad \frac{\overline{z}}{|z^2|+2}=\frac{\alpha i}{2|\alpha|^2+1}$$

上の第 2 式の共役複素数は $\qquad \dfrac{z}{|z|^2+2}=\dfrac{-\overline{\alpha}i}{2|\alpha|^2+1} \qquad \cdots(*)$

(i) $\alpha=0$ のとき，$(*)$ より $\quad z=0$

(ii) $\alpha\neq 0$ のとき，$(*)$ より，$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i}=\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ とおくと $(k>0)$

$|z|=k|\alpha|$ であるから，これを $\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ に代入すると

$$\frac{k^2|\alpha|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k \quad ゆえに \quad |\alpha|^2k^2-(2|\alpha|^2+1)k+2=0$$

したがって $\quad (k-2)(|\alpha|^2k-1)=0 \quad$ これを解いて $\quad k=2,\ \dfrac{1}{|\alpha|^2}$

$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}}=k$ であるから $\quad z=-2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}$

(i), (ii) より $\quad \boldsymbol{\alpha=0}$ **のとき** $\quad \boldsymbol{z=0}$

$\boldsymbol{\alpha\neq 0}$ **のとき** $\quad \boldsymbol{z=-2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}}$