

平成 30 年度 熊本大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
医学部医学科 平成 30 年 2 月 25 日

- 1 t を実数とする。空間の 4 点 $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$, $D(1, 6, 1)$ について, 以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。
- (2) A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。
- (3) $\angle BAC$ が直角のとき, 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

- 2 m, n を整数とする。 xy 平面上の 4 点 (m, n) , $(m-1, n)$, $(m-1, n-1)$, $(m, n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し, 裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし, さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

- (1) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある確率を求めよ。
- (2) 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で, 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。
- (3) 硬貨を 5 回投げたときに, 初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。

- 3 複素数平面上で $|z+i| - |z-i| = 1$ をみたす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし, 複素数の偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) H の点 z に対して, z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) H の点 z に対して $w = \frac{1}{z}$ とする。 w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

- 4 関数 $f(x) = \sqrt{3x^2 + x^3}$ ($x \geq -3$) について, 以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の極大値を求めよ。
- (2) $-3 \leq x \leq 0$ とするとき, $F(x) = \int_x^{x+3} f(t) dt$ の最大値と最小値を求めよ。

解答例

1 (1) $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (3, -3, 0), & \overrightarrow{AC} &= (t-1, 2t-5, t-1), \\ \overrightarrow{BC} &= (t-4, 2t-2, t-1)\end{aligned}$$

(i) $\angle BAC = 90^\circ$ のとき, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ であるから

$$3(t-1) - 3(2t-5) + 0(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 4$$

(ii) $\angle ABC = 90^\circ$ のとき, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ であるから

$$3(t-4) - 3(2t-2) + 0(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -2$$

(iii) $\angle ACB = 90^\circ$ のとき, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ であるから

$$(t-1)(t-4) + (2t-5)(2t-2) + (t-1)^2 = 0$$

$$\text{整理すると} \quad 2t^2 - 7t + 5 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 1, \frac{5}{2}$$

$$(i) \sim (iii) \text{ から} \quad t = 4, -2, 1, \frac{5}{2}$$

(2) $\vec{b} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ とおくと $\vec{b} = (1, -1, 0)$, $\vec{d} = (0, 1, 1)$

A, B, C, D が同一平面上にあるとき, 定数 x, y を用いて

$$\overrightarrow{AC} = x\vec{b} + y\vec{d}$$

$$\begin{aligned}\text{ゆえに} \quad (t-1, 2t-5, t-1) &= x(1, -1, 0) + y(0, 1, 1) \\ &= (x, -x+y, y)\end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad (*) \quad \begin{cases} t-1 = x \\ 2t-5 = -x+y \\ t-1 = y \end{cases}$$

(*) の第 1, 第 3 式から $x = y$ これを第 2 式に代入すると

$$2t-5 = 0 \quad \text{よって} \quad t = \frac{5}{2}$$

別解 \vec{b}, \vec{d} に垂直なベクトルの 1 つは $\vec{n} = (1, 1, -1)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ であるから, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ より

$$1(t-1) + 1(2t-5) - 1(t-1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{5}{2}$$

(3) (1)(i) より, $t = 4$ であるから $C(4, 8, 3)$ ゆえに $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$

$\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$ と $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$$

とおく. $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 1)$ であるから, D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを h とすると

$$h = |\overrightarrow{AD} \cdot \vec{e}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって, 求める四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \triangle ABC \cdot h &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| h \\ &= \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

補足 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき, ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

は, \vec{a} および \vec{b} に直交する. このベクトルを, \vec{a} と \vec{b} のベクトル積と言い, $\vec{a} \times \vec{b}$ で表す¹. 本題において, $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 3, 3)$ より

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-9, -9, 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$$

であるから, $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 1)$ より

$$V = \frac{1}{6} |9| = \frac{3}{2}$$

ベクトル積 (外積) は高校数学の範囲外であるが, 検算として利用できる.

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

- 2 (1) さいころが $R_{(m,n)}$ から $R_{(m+i,n+j)}$ の位置に移る確率を $P_{(i,j)}$ とすると

$$P_{(i,j)} = {}_{i+j}C_i \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \frac{{}_{i+j}C_i}{2^{i+j}} \quad \dots (*)$$

である (i, j は 0 以上の整数) .

$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,4)}$ に移る確率であるから , $(*)$ に $i = 2, j = 3$ を代入して

$$P_{(2,3)} = \frac{{}_5C_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

- (2) 事象 A, B を , 次のように定める

A : 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にある .

B : 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある .

$P(A)$ は , $R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置に移る確率であるから , $(*)$ により

$$P(A) = P_{(2,0)} + P_{(0,2)} = \frac{{}_2C_2}{2^2} + \frac{{}_2C_0}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(A \cap B)$ は , $R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置を通過して , $R_{(3,4)}$ の位置に移る確率であるから

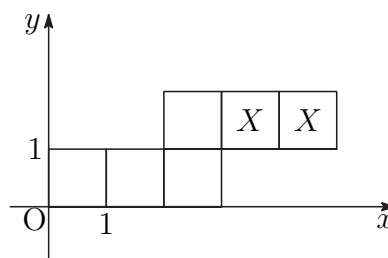
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P_{(2,0)}P_{(0,3)} + P_{(0,2)}P_{(2,1)} \\ &= \frac{{}_2C_2}{2^2} \cdot \frac{{}_3C_0}{2^3} + \frac{{}_2C_0}{2^2} \cdot \frac{{}_3C_2}{2^3} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって , 求める条件付き確率は

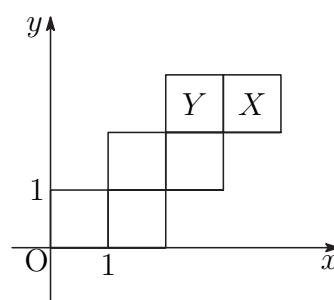
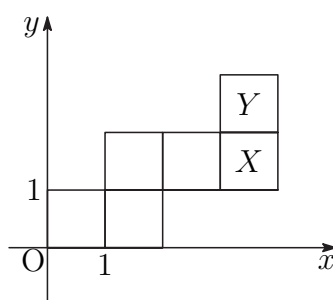
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

- (3) 1枚の硬貨を投げて表，裏が出る事象をそれぞれ X, Y とする．5回目の移動までにさいころの6通りの目がすべて出るには，最初の3回目までに X と Y が少なくとも1回ずつ起こる．最初の3回で1回目が X であるのは，次の (i) ~ (iii) である．

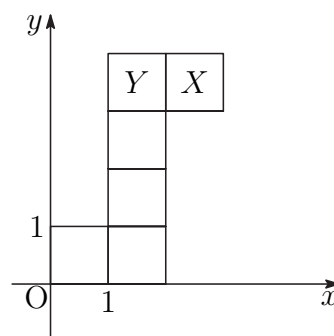
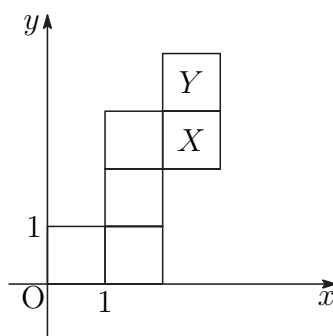
- (i) 最初の3回が X, X, Y の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5回目は X, X の順に起こる．



- (ii) 最初の3回が X, Y, X の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5回目は X, Y または Y, X の順に起こる．



- (iii) 最初の3回が X, Y, Y の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5回目は X, Y または Y, X の順に起こる．



(i) ~ (iii) より，1回目が X であるのは，5通りである．また，1回目が Y であるのは，(i) ~ (iii) の展開図を直線 $y = x$ に関して対称移動したものであるから，5通りである．このとき， X, Y が起こる確率はともに $\frac{1}{2}$ であるから，求める確率は

$$(5 + 5) \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{5}{16}$$

3 (1) $z = x + yi$ とおき (x, y は実数) , これを $|z + i| - |z - i| = 1$ に代入すると

$$\begin{aligned} |x + (y + 1)i| - |x + (y - 1)i| &= 1 \\ \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} &= \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + 1 \end{aligned}$$

両辺を 2 乗すると

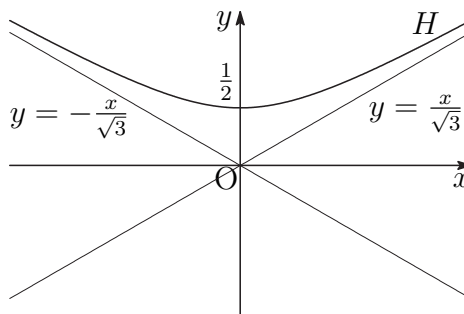
$$\begin{aligned} x^2 + (y + 1)^2 &= x^2 + (y - 1)^2 + 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + 1 \\ 4y - 1 &= 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \end{aligned}$$

上式から $4y - 1 \geq 0$ であり , 再び両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned} (4y - 1)^2 &= 4\{x^2 + (y - 1)^2\} \\ -4x^2 + 12y^2 &= 3 \end{aligned}$$

ゆえに
$$-\frac{x^2}{\frac{3}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \left(y \geq \frac{1}{2}\right)$$

したがって , H の概形は次のようになる .



上の概形から , z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲は $\frac{\pi}{6} < \theta_1 < \frac{5}{6}\pi$

補足 与えた方程式から , H は双曲線で , 焦点は y 軸上の 2 点 $(0, \pm 1)$ で , 2 頂点が $(0, \pm \frac{1}{2})$ であるから , 離心率 $e = 2$ より , $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ とおくと²

$$b = \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

なお , 楕円 (ellipse) , 放物線 (parabola) , 双曲線 (hyperbola) .

²http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf (p.11 を参照)

(2) (1) で求めた概形から $|z| \geq \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{|z|}$ であるから $0 < r_2 \leq 2$

また, $\theta_2 = -\arg z$ であるから, $0 \leq \theta < 2\pi$ に注意して

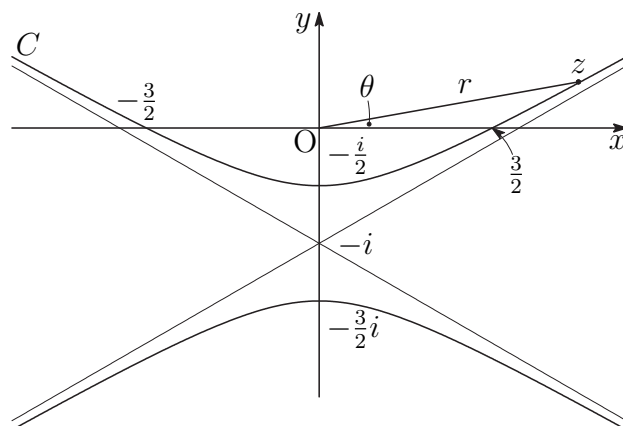
$$-\frac{5}{6}\pi + 2\pi < \theta_2 < -\frac{\pi}{6} + 2\pi \quad \text{すなわち} \quad \frac{7}{6}\pi < \theta_2 < \frac{11}{6}\pi$$

解説 2 次曲線の極方程式の極は 2 次曲線の焦点であるから, 2 次曲線の焦点を複素数平面の原点とする出題もある³.

例えば, $|z + 2i| - |z| = \pm 1$ に対し, $r = |z|$, $\theta = \arg z$ とおくと, 前ページで調べたように, 離心率 $e = 2$ および点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ を通ることから

$$C: r = \frac{\frac{3}{2}}{1 - 2\sin\theta} \quad \cdots (*)$$

となる. C を $0 \leq \theta < 2\pi$ で考えると, $1 - 2\sin\theta = 0$, すなわち, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ のとき, 漸近線と平行となり, これに対応する C 上の点は存在しない. なお, $\theta = \frac{\pi}{6} - 0$ のとき, C は第 1 象限の無限遠点あり, $\theta = \frac{\pi}{6} + 0$ のとき, C は第 3 象限の無限遠点にある. また, $\theta = \frac{5}{6}\pi - 0$ のとき, C は第 4 象限の無限遠点にあり, $\theta = \frac{5}{6}\pi + 0$ のとき, C は第 2 象限の無限遠点にある.



(*) から, C を複素数平面上の点 z を

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{3(\cos\theta + i\sin\theta)}{2(1 - 2\sin\theta)}$$

と表すことができる.

³http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_kou_2002.pdf [3]

4 (1) $f(x) = \sqrt{3x^2 + x^3}$ ($x \geq -3$) より $f'(x) = \frac{3x(x+2)}{2\sqrt{3x^2 + x^3}}$

したがって $f(x)$ の増減表は次のようになる .

x	-3	...	-2	...	0	...
$f'(x)$		+	0	-	<div style="text-align: center;">/</div>	+
$f(x)$	0	\nearrow	極大 2	\searrow	極小 0	\nearrow

増減表から , 求める極大値は $f(-2) = 2$

(2) $F(x) = \int_x^{x+3} f(t) dt$ より ($-3 \leq x \leq 0$)

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x+3) - f(x) = \frac{\{f(x+3)\}^2 - \{f(x)\}^2}{f(x+3) + f(x)} \\ &= \frac{3(x+3)^2 + (x+3)^3 - (3x^2 + x^3)}{f(x+3) + f(x)} = \frac{9(x+3)(x+2)}{f(x+3) + f(x)} \end{aligned}$$

$f(x) = |x|\sqrt{x+3}$ であるから , $F(x)$ の増減表は次のようになる .

x	-3	...	-2	...	0
$F'(x)$		-	0	+	
$F(x)$		\searrow	極小	\nearrow	

$-3 \leq x \leq 0$ に注意して , $F(x)$ を求める .

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{x+3} f(t) dt \\ &= \int_0^x t\sqrt{t+3} dt + \int_0^{x+3} t\sqrt{t+3} dt \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

まず

$$\begin{aligned} \int_0^x t\sqrt{t+3} dt &= \int_0^x \{(t+3)^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{t+3}\} dt \\ &= \left[\frac{2}{5}(t+3)^{\frac{5}{2}} - 2(t+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x \\ &= \left[\frac{2}{5}(t-2)(t+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x \\ &= \frac{2}{5}(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{5}\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① , ② より

$$F(x) = \frac{2}{5}\{(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + (x+1)(x+6)^{\frac{3}{2}}\} + \frac{24}{5}\sqrt{3}$$

増減表の x の値から

$$F(-3) = \frac{2}{5}(-2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{12}{5}\sqrt{3}$$

$$F(-2) = \frac{2}{5}(-4 - 4^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{24}{5}(\sqrt{3} - 1)$$

$$F(0) = \frac{2}{5}(-2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} + 6^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{12}{5}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$$

よって 最大値 $F(0) = \frac{12}{5}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$,

最小値 $F(-2) = \frac{24}{5}(\sqrt{3} - 1)$