平成30年度　大分大学2次試験前期日程(数学問題)
工・経済・教育・医学部　平成30年2月25日

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (100分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数I・II・A・B (100分)
- 教育学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$ 数I・II・A・B (80分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$ 数I・II・III・A・B (80分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ aを定数，xを実数とし，

$$y = 9^x + \frac{1}{9^x} - 4a\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)$$

とする．$t = 3^x + \dfrac{1}{3^x}$ とおく．

(1) tのとり得る値の範囲を求めなさい．

(2) yをtの式で表しなさい．

(3) yの最小値とそのときのxの値を，aを用いてそれぞれ表しなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とし，

$$f(\theta) = \sin 3\theta - \cos 3\theta - 3\sin 2\theta + 3(\sin\theta + \cos\theta)$$

とする．

(1) $t = \sin\theta + \cos\theta$ とするとき，tのとり得る値の範囲を求めなさい．

(2) (1)のとき，$f(\theta)$をtを用いて表しなさい．

(3) 方程式 $f(\theta) = k$ が異なる3つの実数解をもつとき，定数kの値の範囲を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ p，q，u，vを正の実数とする．空間に5点O$(0,\ 0,\ 0)$，P$(p,\ 0,\ 0)$，Q$(0,\ q,\ 0)$，R，Sがある．$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$はともに$\vec{n} = (-u, -v,\ 1)$に垂直で，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$と$\overrightarrow{\mathrm{QS}}$はともに$\vec{e} = (0,\ 0,\ 1)$に平行である．$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$のなす角を$\theta$とする．

(1) 2点R，Sの座標をp，q，u，vを用いて表しなさい．

(2) $\cos\theta$の値をu，vを用いて表しなさい．

(3) $\triangle$OPQと$\triangle$ORSの面積の比をu，vを用いて表しなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $x > 0$ とし，

$$f(x) = \log x, \quad g(x) = \log x^2$$

とする．

(1) a を正の定数とする．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ \log a)$ における接線の方程式を求めなさい．

(2) 2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めなさい．

(3) 2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および (2) で求めた直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\mathrm{AB} = 8$，$\mathrm{AC} = 5$，$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ がある．

(1) 点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心であるとき，$\angle\mathrm{BPC}$ の大きさを求めなさい．

(2) 点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心であるとき，線分 BP の長さを求めなさい．

(3) 点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心であるとき，$\triangle\mathrm{PBC}$ の面積を求めなさい．

$\boxed{6}$ 次の初項と漸化式で決まる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えなさい．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 一般項 a_n を求めなさい．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の極限を調べなさい．

$\boxed{7}$ 5 枚の硬貨を表を上にして横一列に並べる．1 個のサイコロを投げて出た目が $k(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ のとき，左から k 番目の硬貨の表裏を入れ替え，6 の目が出たら何もしない．この操作を続けて行うとき，以下の問いに答えなさい．ただし，サイコロの目はいずれも同様な確からしさで出るとする．

(1) サイコロを n 回投げた時点で裏になっている硬貨が n 枚である確率を求めなさい．ただし，n は 5 以下の正の整数とする．

(2) サイコロを 4 回投げた時点で硬貨がすべて表である確率を求めなさい．

(3) サイコロを 4 回投げた時点で裏になっている硬貨が t 枚である確率を $P(t)$ とする．このとき，$\displaystyle\sum_{t=1}^{4} tP(t)$ の値を求めなさい．

$\boxed{8}$ 原点 O(0, 0) と点 A(0, 2) を直径の両端とする円 C がある．円 C の周上を動く点 Q と原点 O を通る直線を l とし，点 A における円 C の接線を m として，l と m の交点を R とする．そして，点 R と x 座標が等しく，かつ点 Q と y 座標が等しい点を P とする．ただし，点 Q は原点 O とは異なるとする．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) 点 P の軌跡の方程式を求め，$y = f(x)$ の形で表しなさい．

(2) 上の (1) で得られた $y = f(x)$ について増減や凹凸を調べ，概形を描きなさい．

(3) 曲線 $y = f(x)$，x 軸，直線 $x = -2$ および直線 $x = 2\sqrt{3}$ で囲まれた図形の面積を求めなさい．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 相加・相乗平均の大小関係により

$$t = 3^x + \frac{1}{3^x} \geqq 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t \geqq 2}$$

なお，等号が成立するのは　$3^x = \dfrac{1}{3^x}$　すなわち　$x = 0$

(2) $y = 9^x + \dfrac{1}{9^x} - 4a\left(3^x + \dfrac{1}{3^x}\right)$

$$= \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)^2 - 2 - 4a\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) = \boldsymbol{t^2 - 4at - 2}$$

(3) (1), (2) の結果から　$y = t^2 - 4at - 2 = (t - 2a)^2 - 4a^2 - 2\ (t \geqq 2)$

(i) $2a < 2$，すなわち，$a < 1$ のとき

$$t = 2 \text{ で最小値 } \boldsymbol{2 - 8a}$$

このとき，(1) の結果から　$\boldsymbol{x = 0}$

(ii) $2 \geqq 2a$，すなわち，$1 \geqq a$ のとき

$$t = 2a \text{ で最小値 } \boldsymbol{-4a^2 - 2}$$

このとき　$3^x + \dfrac{1}{3^x} = 2a$　ゆえに　$(3^x)^2 - 2a \cdot 3^x + 1 = 0$

これを解いて　$3^x = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$　ゆえに　$\boldsymbol{x = \log_3(a \pm \sqrt{a^2 - 1})}$

$\boxed{2}$ (1) $t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より $\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

(2) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1 = t^2 - 1 \quad \cdots①$

$\sin 3\theta + \sin\theta = 2\sin 2\theta\cos\theta$, $\cos 3\theta - \cos\theta = -2\sin 2\theta\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 2\sin 2\theta\cos\theta - \sin\theta,\\ \cos 3\theta &= -2\sin 2\theta\sin\theta + \cos\theta\end{aligned}$$

ゆえに
$$\begin{aligned}\sin 3\theta - \cos 3\theta &= (\sin\theta + \cos\theta)(2\sin 2\theta - 1)\\ &= t\{2(t^2 - 1) - 1\} = 2t^3 - 3t \quad \cdots②\end{aligned}$$

①，② より
$$\begin{aligned}f(\theta) &= \sin 3\theta - \cos 3\theta - 3\sin 2\theta + 3(\sin\theta + \cos\theta)\\ &= 2t^3 - 3t - 3(t^2 - 1) + 3t = \boldsymbol{2t^3 - 3t^2 + 3}\end{aligned}$$

別解 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より

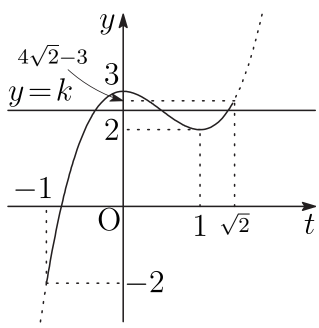
$$\begin{aligned}\sin 3\theta - \cos 3\theta &= 3(\sin\theta + \cos\theta) - 4(\sin^3\theta + \cos^3\theta)\\ &= (\sin\theta + \cos\theta)\{3 - 4(1 - \sin\theta\cos\theta)\}\\ &= (\sin\theta + \cos\theta)(2\sin 2\theta - 1)\\ &= t\{2(t^2 - 1) - 1\} = 2t^3 - 3t\end{aligned}$$

(3) $g(t) = 2t^3 - 3t^2 + 3$ $(-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$ とおくと

$$g'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t - 1)$$

$g(t)$ の増減は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$4\sqrt{2} - 3$



$y = g(t)$ のグラフは，右の図のようになる．

$f(\theta) = k$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，$y = g(t)$ のグラフと直線 $y = k$ が異なる 3 つの共有点をもつときであるから

$$\boldsymbol{2 < k \leqq 4\sqrt{2} - 3}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = s\vec{e}$, $\overrightarrow{\mathrm{QS}} = t\vec{e}$ とおくと (s, t は実数)

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\vec{e} = (p,\ 0,\ 0) + s(0,\ 0,\ 1) = (p,\ 0,\ s)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + t\vec{e} = (0,\ q,\ 0) + t(0,\ 0,\ 1) = (0,\ q,\ t)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ はともに $\vec{n} = (-u, -v,\ 1)$ に垂直であるから

$$p\cdot(-u) + s\cdot 1 = 0,\quad q\cdot(-v) + t\cdot 1 = 0\quad \text{ゆえに}\quad s = pu,\quad t = qv$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (p,\ 0,\ pu)$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = (0,\ q,\ qv)$

よって　$\mathrm{R}(\boldsymbol{p},\ \mathbf{0},\ \boldsymbol{pu})$, $\mathrm{S}(\mathbf{0},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{qv})$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = p(1,\ 0,\ u)$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = q(0,\ 1,\ v)$

$p > 0$, $q > 0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ のなす角 θ は，2 つのベクトル

$$\vec{r} = \frac{1}{p}\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1,\ 0,\ u),\quad \vec{s} = \frac{1}{q}\overrightarrow{\mathrm{OS}} = (0,\ 1,\ v)$$

のなす角であるから

$$\cos\theta = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}||\vec{s}|} = \frac{uv}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}} = \frac{\boldsymbol{uv}}{\sqrt{\mathbf{(1+\boldsymbol{u}^2)(1+\boldsymbol{v}^2)}}}$$

(3) $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{P}(p,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ q,\ 0)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は $\dfrac{1}{2}pq$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = p\vec{r}$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = q\vec{s}$ より

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ORS} &= \frac{1}{2}pq\sqrt{|\vec{r}|^2|\vec{s}|^2 - (\vec{r}\cdot\vec{s})^2}\\ &= \frac{1}{2}pq\sqrt{(1+u^2)(1+v^2) - (uv)^2}\\ &= \frac{1}{2}pq\sqrt{1+u^2+v^2}\end{aligned}$$

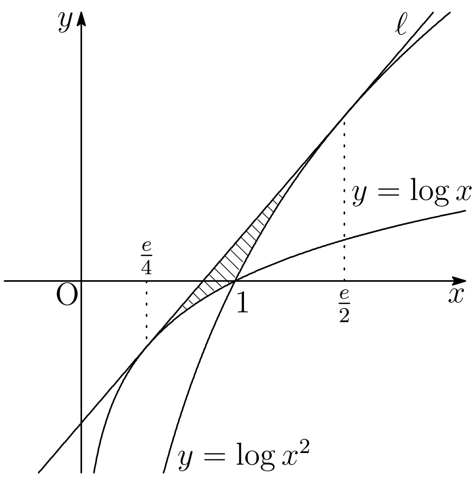
よって　$\boldsymbol{\triangle\mathrm{OPQ} : \triangle\mathrm{ORS} = 1 : \sqrt{1+p^2+q^2}}$

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=\log x$ より　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-\log a=\frac{1}{a}(x-a)\quad\text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{x}{a}+\log a-1}$$

(2) $g(x)=\log x^2$ より　$g'(x)=\dfrac{2}{x}$



$y=g(x)$ 上の点 $(b,\ g(b))$ における接線の方程式は

$$y-\log b^2=\frac{2}{b}(x-b)$$

すなわち　$y=\dfrac{2x}{b}+2\log b-2$

これと (1) で求めた接線が一致するとき

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{b},\quad \log a-1=2\log b-2$$

上の第 1 式から　$b=2a$　これを第 2 式に代入して整理すると

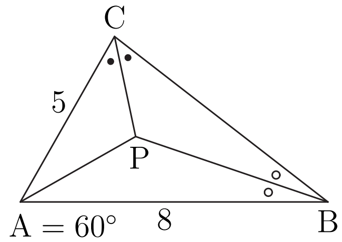
$$2\log 2a-\log a=1\quad\text{ゆえに}\quad \log 4a=1\quad\text{すなわち}\quad a=\frac{e}{4}$$

$a=\dfrac{e}{4}$ を (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{y=\dfrac{4x}{e}-\log 4}$

(3) $b=2a=\dfrac{e}{2}$，求める面積は上の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{e}{4}}^{\frac{e}{2}}\left(\frac{4x}{e}-\log 4\right)dx-\int_{\frac{e}{4}}^{1}\log x\,dx-\int_{1}^{\frac{e}{2}}\log x^2\,dx\\&=\left[\frac{2x^2}{e}-x\log 4\right]_{\frac{e}{4}}^{\frac{e}{2}}-\left[x(\log x-1)\right]_{\frac{e}{4}}^{1}-\left[2x(\log x-1)\right]_{1}^{\frac{e}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{3}{8}e-1}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) PA，PB，PC はそれぞれ ∠A，∠B，∠C の二等分線であるから，$B = 2\beta$，$C = 2\gamma$ とおくと



$$2\beta + 2\gamma = 180^\circ - A = 120^\circ$$

ゆえに　　$\beta + \gamma = 60^\circ$

よって　　$\angle\mathrm{BPC} = 180^\circ - (\beta + \gamma) = \mathbf{120^\circ}$

(2) 余弦定理により

$$\mathrm{BC}^2 = 5^2 + 8^2 - 2{\cdot}5{\cdot}8\cos 60^\circ = 49 \quad \text{よって} \quad \mathrm{BC} = 7$$

BP は △ABC の外接円の半径であるから，正弦定理により

$$2\mathrm{BP} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{7}{\sin 60^\circ}$$

よって　　$\mathrm{BP} = \dfrac{7}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{7}{3}\sqrt{3}}$

(3) $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}{\cdot}\mathrm{AB}\sin A = \dfrac{1}{2}{\cdot}5{\cdot}8\sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$

辺 BC の中点を M とすると，P は AM を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\triangle\mathrm{PBC} = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC} = \boldsymbol{\frac{10}{3}\sqrt{3}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 特性方程式 $x = 1 + \dfrac{1}{x}$，すなわち，$x^2 - x - 1 = 0$

の 2 つの解を $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, \quad \alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

上の 2 式から $\quad a_{n+1} - \alpha = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{a_n - \alpha}{\alpha a_n} \quad \cdots①$

同様に $\quad a_{n+1} - \beta = -\dfrac{a_n - \beta}{\beta a_n} \quad \cdots②$

①，② から $\quad \dfrac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \dfrac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$ ゆえに $\quad \dfrac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} \dfrac{1-\alpha}{1-\beta}$

$\alpha + \beta = 1$ より $\quad \dfrac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = \dfrac{\beta^n}{\alpha^n}$ したがって $\quad a_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} \quad \cdots(*)$

よって $\quad a_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} = \boldsymbol{\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2\{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\}}}$

(2) $(*)$ より $\quad a_n = \dfrac{\alpha\{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\}}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$

$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} < 1$ であるから $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) n 回投げたとき，5 以下の異なる目が n 回出る確率であるから

$$\boldsymbol{\frac{{}_5\mathrm{P}_n}{6^n}}$$

(2) 4 回投げたとき，硬貨がすべて表であるのは，次の (i)〜(iii) の場合である．

(i) 6 の目が 4 回出るとき $\cdots$ 6666 の 1 通り

(ii) 6 の目が 2 回出るとき (A は 5 以下の正の整数)

「A,A,6,6」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{C}_1 \cdot \dfrac{4!}{2!2!} = 5 \cdot 6 = 30$ (通り)

(iii) 6 の目が出ないとき (A，B は 5 以下の異なる正の整数)

「A,A,B,B」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{C}_2 \cdot \dfrac{4!}{2!2!} = 10 \cdot 6 = 60$ (通り)

「A,A,A,A」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{C}_1 = 5$ (通り)

(i)〜(iii) より，求める確率は

$$(1+30+65)\left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{96}{1296} = \boldsymbol{\frac{2}{27}}$$

(3) 4 回投げた時点で裏になっている枚数と確率について，次のようになる．

(a) 裏になっている硬貨が 1 枚のとき (A,B は 5 以下の異なる正の整数)

「A,6,6,6」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{C}_1 \cdot \dfrac{4!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ (通り)

「A,A,B,6」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{P}_2 \cdot \dfrac{4!}{2!} = 20 \cdot 12 = 240$ (通り)

「A,A,A,6」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{C}_1 \cdot \dfrac{4!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ (通り)

よって $\quad (20+240+20)\left(\dfrac{1}{6}\right)^6 = \dfrac{280}{1296}$

(b) 裏になっている硬貨が 2 枚のとき (A,B,C は 5 以下の異なる正の整数)

「A,B,6,6」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{C}_2 \cdot \dfrac{4!}{2!} = 10 \cdot 12 = 120$ (通り)

「A,A,B,C」$\cdots$ $\quad 5 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \dfrac{4!}{2!} = 5 \cdot 6 \cdot 12 = 360$ (通り)

「A,A,A,B」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{P}_2 \cdot \dfrac{4!}{3!} = 20 \cdot 4 = 80$ (通り)

よって $\quad (120+360+80)\left(\dfrac{1}{6}\right)^6 = \dfrac{560}{1296}$

(c) 裏になっている硬貨が 3 枚のとき (A,B,C は 5 以下の異なる正の整数)

「A,B,C,6」$\cdots$ $\ {}_5C_3 \cdot 4! = 10 \cdot 24 = 240$ (通り)

よって $240\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = \dfrac{240}{1296}$

(d) 裏になっている硬貨が 4 枚のとき (A,B,C,D は 5 以下の異なる正の整数)

「A,B,C,D」$\cdots$ $\ {}_5C_4 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$ (通り)

よって $120\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = \dfrac{120}{1296}$

(a)〜(d) から，求める値は

$$\sum_{t=1}^{4} tP(t) = 1\cdot\frac{280}{1296} + 2\cdot\frac{560}{1296} + 3\cdot\frac{240}{1296} + 4\cdot\frac{120}{1296} = \frac{2600}{1296} = \mathbf{\frac{325}{162}}$$

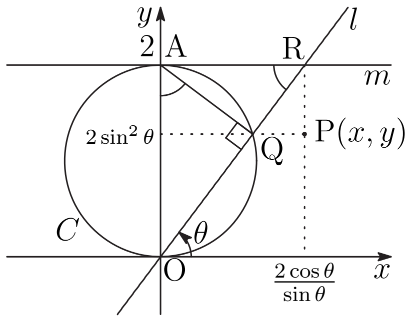
注意 (3) は確率変数 t の平均 (期待値) を求める問題.

$$\sum_{t=0}^{4} P(t) = 1$$

上式を満たすことを確認して計算する必要がある.

t	0	1	2	3	4	計
$P(t)$	$\frac{96}{1296}$	$\frac{280}{1296}$	$\frac{560}{1296}$	$\frac{240}{1296}$	$\frac{120}{1296}$	1

$\boxed{8}$ (1) l と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると $(0<\theta<\pi)$，右の図から



$$\mathrm{OQ}=2\sin\theta,\quad \mathrm{OR}=\frac{2}{\sin\theta}$$

したがって，$\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標は

$$x=\mathrm{OR}\cos\theta=\frac{2\cos\theta}{\sin\theta},$$
$$y=\mathrm{OQ}\sin\theta=2\sin^2\theta$$

上の 2 式から

$$2\sin^2\theta=\frac{2\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{8}{4+\left(\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{y=\frac{8}{4+x^2}}$$

(2) $f(x)=\dfrac{8}{4+x^2}$ より

$$f'(x)=\frac{-16x}{(4+x^2)^2}$$
$$f''(x)=\frac{-16(4+x^2)^2-(-16x)\cdot2(4+x^2)\cdot2x}{(4+x^2)^4}=\frac{16(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}$$

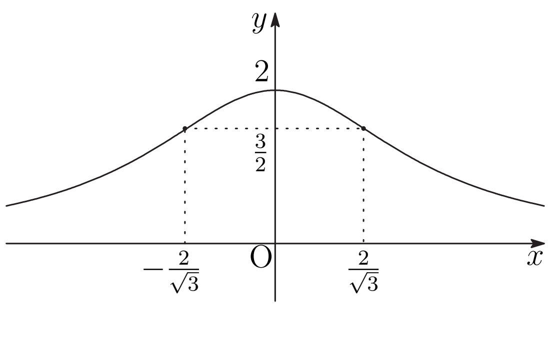
$y=f(x)$ の増減・凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\frac{3}{2}$	⤴	2	⤵	$\frac{3}{2}$	⤵

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

よって　極大値 $f(0)=\mathbf{2}$，変曲点 $\left(\pm\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}},\ \boldsymbol{\frac{3}{2}}\right)$

また，グラフの概形は次のようになる．



(3) (1) の結果から，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-2}^{2\sqrt{3}}\frac{8}{4+x^2}\,dx$$

$x=2\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$

x	$-2 \longrightarrow 2\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　$S=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{8}{4+(2\tan\theta)^2}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}4\,d\theta=\Big[\,4\theta\,\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{7}{3}\pi}$