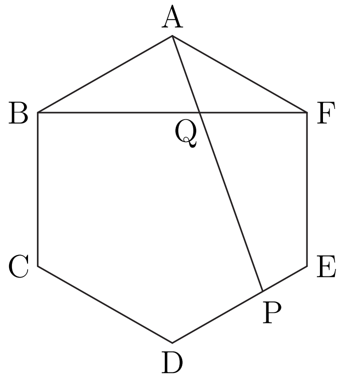
平成30年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・医・農・教育学部　平成30年2月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部は，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{6}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{7}$ ～ $\boxed{9}$ 数I・II・A・B (120分)
- 教育学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$ 数I・II・A・B (100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 下の図のような1辺の長さが1の正六角形ABCDEFにおいて，線分DEを2 : 1に内分する点をPとし，直線APと直線BFの交点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$とおくとき，次の問に答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2} - \dfrac{a_n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

で定められているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 4 つの有理数 p，q，r，s が

$$p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$$

を満たすとする．このとき，$p = r$ かつ $q = s$ であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは用いてよい．

(2) 不等式

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2}$$

が成立することと，$a_n = p_n + q_n\sqrt{2}$ (p_n および q_n は有理数) と表されることを n に関する数学的帰納法を用いて示せ．

(3) (2) で定義された数列 $\{p_n\}$ に対して，p_{n+1} と p_n が満たす関係式，および一般項 p_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x) = xe^{-x}$ とする．O(0, 0)，P(t, 0)，Q(t, $f(t)$)，R(4, 0) とする．ただし，$0 < t < 4$ とする．△PQR の面積を $S_1(t)$ とし，線分 OQ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする．$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．ただし，$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ は用いてよい．

(2) $S_1(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $S_2(t)$ を t を用いて表せ．

(4) $S(t)$ の極値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲線 $C : y = \log x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ をとる．ただし，点 P および原点を通る直線と点 P における曲線 C の接線が垂直に交わっているものとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\log t$ を t についての整式で表せ．

(2) $0 < x < 1$ の範囲で不等式

$$2\log x < -x^2 + 4x - 3$$

が成立することを示せ．

(3) $S = \displaystyle\sum_{t=1}^{\infty} t^{2n-1}$ とおく．$S = \dfrac{f(t)}{g(t)}$ となるような t についての整式 $f(t)$，$g(t)$ を一組求めよ．また，$S > 1.1$ となることを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問に答えよ．

(1) 1, 4, 9, 16 のように，自然数の 2 乗で表される数を平方数という．n を平方数でない自然数とするとき，$\sqrt{n}$ は無理数であることを示せ．

(2) a，b を正の有理数，n を自然数とするとき，$a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ は無理数であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であり，すべての実数 x，y について等式

$$f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x$$

が成り立つとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(0)$ を求めよ．

(2) a を実数とする．$f(x)$ は $x = a$ で微分可能であることを示せ．

(3) $f'(0) = 3$ であるとする．$f'(x)$ および $f(x)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $f(x) = 2x(3-x)$，$g(x) = x(x-4)$ とおき，$0 < t < 3$ とする．$0 \leqq x \leqq t$ の範囲での曲線 $y = f(x)$，x 軸，直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を $S_1(t)$ とする．$t \leqq x \leqq 4$ の範囲での曲線 $y = g(x)$，x 軸，直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする．$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) $S_1(t)$ を t を用いて表せ．

(2) $S_2(t)$ を t を用いて表せ．

(3) t が $0 < t < 3$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ a を正の数とする．放物線 $C_1 : y = x^2$ を x 軸方向に a，y 軸方向に $2a$ だけ平行移動した放物線を C_2 とする．C_1 と C_2 の交点を P とするとき，次の問に答えよ．

(1) 点 P の座標を a を用いて表せ．

(2) 放物線 C_2 の点 P における接線の方程式を a を用いて表せ．

(3) (2) で求めた接線の傾きと y 切片がともに正となるような正数 a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 座標平面上で，点 P は原点 O を出発点とし，サイコロを投げて奇数の目が出ればその目の分だけ x 軸と平行に正の方向に進み，偶数の目が出ればその目の分だけ y 軸と平行に正の方向に進むものとする．n を 2 以上の自然数とするとき，次の問に答えよ．

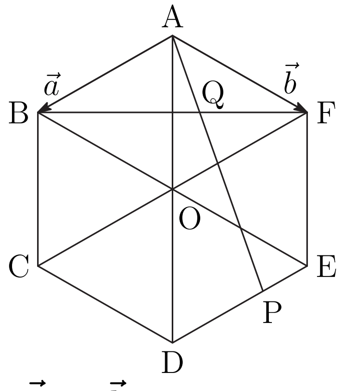
(1) サイコロを 3 回投げ終えたとき，点 P の x 座標と y 座標が等しくなる確率を求めよ．

(2) サイコロを n 回投げ終えたとき，点 P の y 座標が 2 となる確率を n を用いて表せ．

(3) サイコロを $n-1$ 回投げ終えたときには点 P の y 座標が 2 以下であり，かつ n 回投げ終えたときに点 P の y 座標が 4 以上である確率を n を用いて表せ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 正六角形の対角線 AD，BE，CF の交点を O とする．



$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} = 2(\vec{a} + \vec{b}) = \boldsymbol{2\vec{a} + 2\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b}$

点 P は線分 DE を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{2+1} = \frac{2\vec{a} + 2\vec{b} + 2(\vec{a} + 2\vec{b})}{3} = \boldsymbol{\frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\left(\frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}\right) = \frac{4}{3}k + 2k\vec{b}$$

このとき，Q は線分 BF 上のであるから

$$\frac{4}{3}k + 2k = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{3}{10}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{10}\vec{a} + 2\cdot\frac{3}{10}\vec{b} = \boldsymbol{\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}}$

(4) (3) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{5}(2\vec{a} + 3\vec{b})$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 120° であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 1\cdot 1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}|2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \\ &= 4\cdot 1^2 + 12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 9\cdot 1^2 = 7\end{aligned}$$

$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{7}$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| = \frac{1}{5}|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{5}}$

$\boxed{\textbf{2}}$

$$(*)\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2} - \dfrac{a_n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

(1) $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$ より　$(q-s)\sqrt{2} = r - p \quad \cdots (*)$

$q - s \neq 0$ と仮定すると　　$\sqrt{2} = \dfrac{r-p}{q-s}$　($p,\ q,\ r,\ s$ は有理数)

上式について，左辺は無理数，右辺は有理数となり矛盾．
したがって，$q - s = 0$　これを $(*)$ に代入して　$r - p = 0$

よって　$p = r$ かつ $q = s$

(2)
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2} \quad \cdots (\mathrm{A})$$

［1］$n = 1$ のとき，$a_1 = 1$ であるから

$$\left(1 - \frac{1}{1}\right)\sqrt{2} < a_1 < \sqrt{2}$$

このとき，(A) は成立する．

［2］$n = k$ のとき，(A) が成立する，すなわち

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)\sqrt{2} < a_k < \sqrt{2}$$

であると仮定すると，$(*)$ より

$$\sqrt{2} - a_{k+1} = \sqrt{2} - \left(\sqrt{2} - \frac{a_k}{k+1}\right) = \frac{a_k}{k+1} > 0,$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\sqrt{2} &= \sqrt{2} - \frac{a_k}{k+1} - \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - a_k}{k+1} > 0 \end{aligned}$$

したがって　$\left(1 - \dfrac{1}{k+1}\right)\sqrt{2} < a_{k+1} < \sqrt{2}$

よって，$n = k + 1$ のときも (A) は成立する．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

$$a_n = p_n + q_n\sqrt{2}\ (p_n \text{ および } q_n \text{ は有理数}) \quad \cdots \text{(B)}$$

［1］ $n=1$ のとき，$a_1=1$ であるから

$$1 = 1 + 0\cdot\sqrt{2} \quad (p_1 = 1,\ q_1 = 0) \quad \cdots ①$$

と表されるから，(B) は成立する．

［2］ $n=k$ のとき，(B) が成立する，すなわち

$$a_k = p_k + q_k\sqrt{2} \quad (p_k \text{および } q_k \text{は有理数})$$

と表されると仮定すると，$(*)$ より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \sqrt{2} - \frac{p_k + q_k\sqrt{2}}{k+1} \\ &= -\frac{p_k}{k+1} + \left(1 - \frac{q_k}{k+1}\right)\sqrt{2} \end{aligned}$$

このとき

$$p_{k+1} = -\frac{p_k}{k+1}, \quad q_{k+1} = 1 - \frac{q_k}{k+1} \quad \cdots (**)$$

とおくと，p_k，q_k が有理数であるから，p_{k+1}，q_{k+1} も有理数である．

よって，$n=k+1$ のときも (B) は成立する．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について，(B) は成立する．

(3) ① および $(**)$ の第 1 式より　$p_1 = 1$，$p_{n+1} = -\dfrac{1}{n+1}p_n$

したがって　　$(n+1)!p_{n+1} = -n!p_n$

数列 $\{n!p_n\}$ は，初項 $1!p_1 = 1$，公比 -1 の等比数列であるから

$$n!p_n = (-1)^{n-1}\cdot 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = xe^{-x}$ より

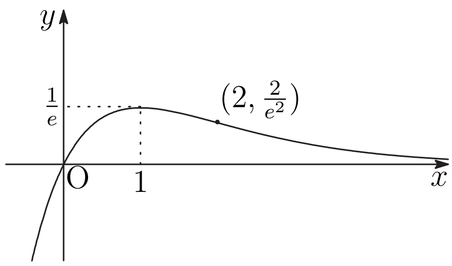
$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$
$$f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\frac{1}{e}$	$\searrow$	変曲点 $\frac{2}{e^2}$	$\searrow$

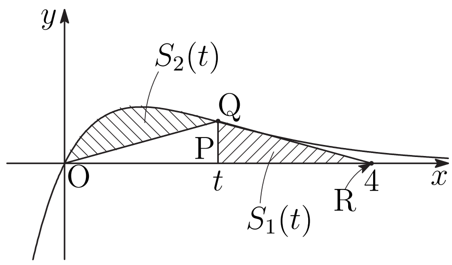
また $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

よって，$y = f(x)$ のグラフの概形は，次のようになる．



(2) $\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(t,\ te^{-t})$，$\mathrm{R}(4,\ 0)$ より，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積 $S_1(t)$ は

$$S_1(t) = \frac{1}{2}(4-t)\cdot te^{-t}$$
$$= \boldsymbol{\frac{t}{2}(4-t)e^{-t}}$$



(3) 右上の図から

$$S_2(t) = \int_0^t xe^{-x}\,dx - \triangle\mathrm{OPQ}$$
$$= \Big[-e^{-x}(x+1)\Big]_0^t - \frac{1}{2}t\cdot te^{-t}$$
$$= -e^{-t}(t+1) + 1 - \frac{t^2}{2}e^{-t} = \boldsymbol{1 - \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t}}$$

(4) (2),(3) の結果から

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \frac{t}{2}(4-t)e^{-t} + 1 - \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$$
$$= (-t^2 + t - 1)e^{-t} + 1$$

したがって　$S'(t) = (-2t+1)e^{-t} + (-t^2+t-1)(-e^{-t})$
$= (t^2 - 3t + 2)e^{-t} = (t-1)(t-2)e^{-t}$

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	(4)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって　極大値 $S(1) = \mathbf{1 - \dfrac{1}{e}}$

極小値 $S(2) = \mathbf{1 - \dfrac{3}{e^2}}$

4 (1) 点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ および原点を通る直線の傾きは $\dfrac{\log t}{t}$

$y = \log x$ より　$y' = \dfrac{1}{x}$　ゆえに点Pにおける接線の傾きは $\dfrac{1}{t}$

直線OPと C 上の点Pにおける接線が垂直であるから

$$\frac{\log t}{t}\cdot\frac{1}{t} = -1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\log t = -t^2}$$

(2) $h(x) = -x^2 + 4x - 3 - 2\log x$ とおくと

$$h'(x) = -2x + 4 - \frac{2}{x} = -\frac{2x^2 - 4x + 2}{x} = -\frac{2(x-1)^2}{x}$$

$0 < x < 1$ において $h'(x) < 0$ であるから，$h(x)$ は単調減少.

$h(1) = 0$ であるあるから，$0 < x < 1$ において $h(x) > 0$，すなわち

$$-x^2 + 4x - 3 - 2\log x > 0$$

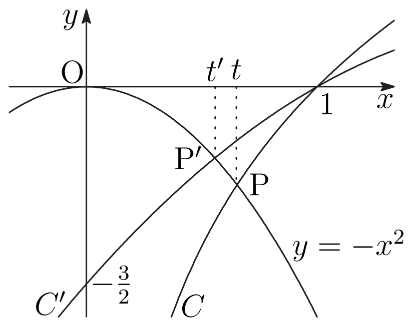
よって，$0 < x < 1$ において　$2\log x < -x^2 + 4x - 3$

(3) (1) の結果から　$\log t = -t^2 < 0$　ゆえに　$0 < t < 1$

ゆえに　$S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1} = \frac{t}{1-t^2}$　　よって　$\boldsymbol{f(t) = t}$，$\boldsymbol{g(t) = 1 - t^2}$

(2) の結果から，$0 < x < 1$ において　$-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2} > \log x$

$C' : y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$ とすると，$0 < x < 1$ において C' は C の上側にある．C，C' と $y = -x^2$ のグラフの交点の x 座標をそれぞれ t，t' とおくと，$t' < t$ である．ここで



$$S(x) = \frac{x}{1-x^2}\ (0 < x < 1)$$

とおくと　　$S'(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0$

$S(x)$ は単調増加であるから

$$S(t) > S(t') \quad \text{すなわち} \quad S > S(t') \quad \cdots ①$$

$C' : y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$ と $y = -x^2$ のグラフの交点 P′ の x 座標は

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} = -x^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 4x - 3 = 0$$

$0 < x < 1$ に注意して　$x = \sqrt{7} - 2$　　すなわち　$t' = \sqrt{7} - 2$

$$S(t') = \frac{t'}{1-t'^2} = \frac{\sqrt{7}-2}{1-(\sqrt{7}-2)^2} = \frac{\sqrt{7}-2}{4\sqrt{7}-10} = \frac{4+\sqrt{7}}{6} \quad \cdots ②$$

ここで　　$\dfrac{4+\sqrt{7}}{6} - 1.1 = \dfrac{5\sqrt{7}-13}{30} = \dfrac{1}{5(5\sqrt{7}+13)} > 0 \quad \cdots ③$

①,②,③ から　　$S > 1.1$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) n を平方数でない自然数とするとき，$\sqrt{n}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素である自然数})$$

を満たす整数 p，q が存在する．この両辺を平方すると

$$n = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{ゆえに} \quad nq = \frac{p^2}{q} \quad \cdots ①$$

① の左辺は整数であり，右辺の p^2 は q と互いに素であるから

$$q = 1 \quad \text{これを①に代入して} \quad n = p^2$$

このとき，n は平方数となり，条件に反し矛盾．
よって，n が平方数でない自然数とするとき，$\sqrt{n}$ は無理数である．

(2) a，b を正の有理数，n を自然数とするとき，$a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}$ が有理数であると仮定すると

$$a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} = r \quad (r \text{ は有理数})$$

両辺を平方すると

$$a^2n + 2ab\sqrt{n(n+1)} + b^2(n+1) = r^2$$
$$\sqrt{n(n+1)} = \frac{r^2 - a^2n - b^2(n+1)}{2ab} \quad \cdots ②$$

② の右辺は有理数であるから，$\sqrt{n(n+1)}$ は有理数である．
したがって，(1) の結果により，$n(n+1)$ は平方数である．
一方，$n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ より，$n(n+1)$ が平方数ではないので矛盾．
よって，a，b を正の有理数，n を自然数とするとき，$a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}$ は無理数である．

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $$f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x \quad \cdots (*)$$

$(*)$ に $x=y=0$ を代入すると

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{f(0) = 0}$$

(2) (1) の結果および $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることに注意して

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a)\cos h + f(h)\cos a - f(a)}{h} \end{aligned}$$

$g(x) = \cos x$ とおくと，$g(0) = 1$，$g'(x) = -\sin x$ より，$g'(0) = 0$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a)g(h) + f(h)g(a) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{ f(a)\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h} + \frac{f(h)-f(0)}{h}g(a) \right\} \\ &= f(a)g'(0) + f'(0)g(a) \\ &= f'(0)\cos a \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は，$x=a$ で微分可能である．

(3) (2) と同様にして，$f'(x)$ を求めると

$$f'(x) = f'(0)\cos x$$

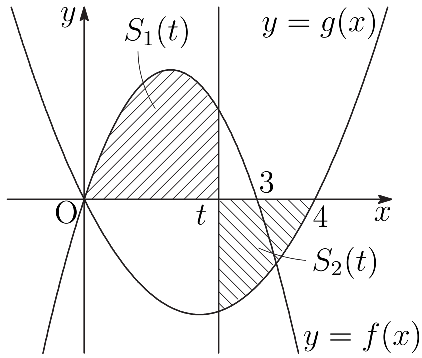
これに $f'(0) = 3$ を代入すると

$$\boldsymbol{f'(x) = 3\cos x}$$

さらに，(1) の結果に注意して積分すると

$$\boldsymbol{f(x) = 3\sin x}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 右の図から



$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_0^t 2x(3-x)\,dx \\ &= \left[\ 3x^2 - \frac{2}{3}x^3\ \right]_0^t \\ &= \mathbf{3t^2 - \frac{2}{3}t^3} \end{aligned}$$

(2) 右の図から

$$S_2(t) = \int_t^4 \{-x(x-4)\}\,dx = \left[\ -\frac{x^3}{3} + 2x^2\ \right]_t^4 = \mathbf{\frac{t^3}{3} - 2t^2 + \frac{32}{3}}$$

(3) (1),(2) の結果から

$$\begin{aligned} S(t) &= S_1(t) + S_2(t) \\ &= -\frac{t^3}{3} + t^2 + t^2 + \frac{32}{3}, \\ S'(t) &= -t^2 + 2t = -t(t-2) \end{aligned}$$

したがって，$S(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める $S(t)$ の最大値は　$S(2) = \mathbf{12}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) C_2 は $C_1 : y = x^2$ を x 軸方向に a，y 軸方向に $2a$ だけ平行移動したものであるから，C_2 の方程式は

$$y - 2a = (x - a)^2 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a \quad \cdots (*)$$

C_1 と C_2 の方程式から y を消去すると $(a > 0)$

$$x^2 = x^2 - 2ax + a^2 + 2a \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a+2}{2}$$

これを C_1 の方程式に代入して　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{a+2}{2}, \frac{(a+2)^2}{4}}\right)$

(2) $(*)$ を微分すると　$y' = 2x - 2a$

これから，C_2 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{a+2}{2},\ \dfrac{(a+2)^2}{4}\right)$ における接線の傾きは

$$y' = 2\cdot\frac{a+2}{2} - 2a = 2 - a$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y - \frac{(a+2)^2}{4} = (2-a)\left(x - \frac{a+2}{2}\right)$$

よって　$$\boldsymbol{y = (2-a)x + \frac{(a+2)(3a-2)}{4}}$$

(3) (2) で求めた接線の傾きと y 切片がともに正であるから

$$\begin{cases} 2 - a > 0 \\ (a+2)(3a-2) > 0 \end{cases}$$

第 1 式を解いて　$a < 2$　$\cdots$①

第 2 式を解いて　$a < -2,\ \dfrac{2}{3} < a$　$\cdots$②

$a > 0$ に注意して，①，② の共通範囲を求めると　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3} < a < 2}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) サイコロを3回投げ終えたとき，点Pのx座標とy座標が等しくなるとき，サイコロの目の出方の組合せは

$$\{1,1,2\},\ \{1,3,4\},\ \{3,3,6\},\ \{1,5,6\}$$

よって，求める確率は

$$\left(\frac{3!}{2!}+3!+\frac{3!}{2!}+3!\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{18}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

(2) サイコロをn回投げたとき，2の目が1回と奇数の目が$n-1$回出る確率であるから

$${}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\frac{n}{3\cdot 2^n}}$$

(3) (i) サイコロを$n-1$回投げ終えたときに点Pのy座標が0($n-1$回すべて奇数の奇数の目)で，n回投げ終えたときに点Pのy座標が4以上(n回目に4または6の目)である確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$$

(ii) サイコロを$n-1$回投げ終えたときに点Pのy座標が2で，n回投げ終えたときに点Pのy座標が4以上(n回目に偶数の目)である確率は，(2)の結果を利用して

$$\frac{n-1}{3\cdot 2^{n-1}}\times\frac{3}{6}=\frac{n-1}{3\cdot 2^n}$$

求める確率は，(i)または(ii)の確率であるから

$$\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}+\frac{n-1}{3\cdot 2^n}=\boldsymbol{\frac{n+1}{3\cdot 2^n}}$$