平成30年度　九州工業大学２次試験前期日程(数学問題)
工学部・情報工学部　平成30年2月25日

- 数I・II・III・A・B (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ aを正の実数とする．円$C : x^2 + y^2 = 1$と曲線$D : y = ax^2 - 1$について，次に答えよ．

(1) aの値によらず，円Cと曲線Dの両方がつねに通る点の座標を求めよ．

(2) 円Cと曲線Dが(1)で求めた点以外で交点をもつとき，aの範囲を求めよ．

(3) aが(2)で求めた範囲にあるとき，(1)で求めた点以外の円Cと曲線Dの交点の座標をaを用いて表せ．

(4) (3)で求めた交点を通り，x軸と平行な直線をℓとする．直線ℓと曲線Dで囲まれた部分をy軸のまわりに1回転してできる立体の体積Vをaを用いて表せ．

(5) (4)で求めた立体の体積Vの最大値を求めよ．また，そのときのaの値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ Lを正の定数とする．3以上の整数nに対して，辺の長さの和がLである正n角形をP_nとし，P_nの面積を$S(n)$とする．次に答えよ．

(1) P_nの外接円の中心から各辺に下ろした垂線の長さをhとする．hをLとnを用いて表せ．

(2) $S(n)$をLとnを用いて表せ．

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$において，関数$f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$が単調増加であることを示せ．

(4) $S(n)$と$S(n+1)$の大小を比較せよ．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n)$を$L$を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面 α 上の $\triangle$OAB に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=t$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とする．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．また，$\triangle$OAB の面積を S とする．次に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-4\sqrt{3}S$ を t，$\cos\theta$，$\sin\theta$ を用いて表せ．

(2) t を固定したとき，(1) で求めた式を $f(\theta)$ とする．$f(\theta)$ の最小値を t を用いて表せ．また，その最小値をとるときの θ の値を求めよ．

設問 (3)，(4) では，点 P が平面 α 上を動くものとし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{x}$ とする．

(3) t および θ を固定したとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2$ の最小値を t，$\cos\theta$ を用いて表せ．また，その最小値をとるときの $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(4) t，θ および $\vec{x}$ によらず，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2 \geqq \dfrac{4\sqrt{3}}{3}S$ が成り立つことを示せ．また，この不等式において等号が成立するのはどのような場合か答えよ．

$\boxed{4}$ 人口知能ベンチャータウンにあるA社とB社は,「はい」か「いいえ」で答えられる質問に回答する知能ロボットを開発した．質問に対して，A社製のロボットは，$\frac{4}{5}$ の確率で正しい答えを返し，$\frac{1}{5}$ の確率で間違った答えを返す．B社製のロボットは，$\frac{1}{10}$ の確率で正しい答えを返し，$\frac{9}{10}$ の確率で間違った答えを返す．A社製のロボットが3体，B社製のロボットが3体，計6体のロボットがある．これらのロボットは外見では区別することができない．

ベンチャータウンの入口に，二股の分かれ道があり，一方の道はA社へ，もう一方の道はB社へ続いている．この入口に，6体の中から無作為に選ばれた1体のロボットが案内役として立っている．次に答えよ．

(1) 案内役ロボットに「あなたはA社製のロボットですか？」と質問して，答えが「はい」である確率を求めよ．

(2) 案内役ロボットに「あなたはA社製のロボットですか？」と質問して，答えが「はい」であったとき，このロボットがA社製のロボットである確率を求めよ．

(3) 案内役ロボットに，一方の道を指しながら「この道はあなたを作った会社へ続く道ですか？」と質問して，答えが「はい」であったとき，指した道がA社へ続く道である確率を求めよ．

(4) 案内役ロボットが，(2)，(3) のどちらの質問に対しても「はい」と答えたとき，指した道がA社へ続く道である確率を求めよ．

(5) 残りの5体のロボットの中から無作為に選ばれた1体のロボットが入口にやってきた．これら2体のロボットに「あなたたちは同じ会社製のロボットですか？」と質問したところ，案内役ロボットは「はい」と答え，あとから来たロボットは「いいえ」と答えた．このとき，2体ともA社製のロボットである確率を求めよ．

正解

$\boxed{1}$ (1) $D: y = ax^2 - 1$ が a の値によらず通る点は　$(0, -1)$

$C: x^2 + y^2 = 1$ もこの点を通るから，求める点は　$\mathbf{(0, -1)}$

(2) C と D の方程式から x を消去すると

$$y = a(1 - y^2) - 1 \quad \text{整理すると} \quad a(y^2 - 1) + y + 1 = 0$$

ゆえに　$(y+1)(ay - a + 1)$　これを解いて　$y = -1,\ \dfrac{a-1}{a}$　$\cdots$①

共有点の y 座標に注意して　$-1 < \dfrac{a-1}{a} \leqq 1$　よって　$\boldsymbol{a > \dfrac{1}{2}}$

(3) 点 $(0, -1)$ 以外の C と D の共有点の y 座標は，① より　$y = \dfrac{a-1}{a}$

これを D の方程式に代入して

$$\frac{a-1}{a} = ax^2 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \pm\frac{\sqrt{2a-1}}{a}$$

よって，求める交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{\sqrt{2a-1}}{a},\ \dfrac{a-1}{a}\right)}$

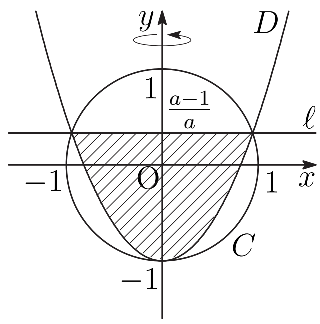
(4) D と ℓ で囲まれた部分は右の図の斜線部分で，y 軸に関して対称である．D の方程式から

$$x^2 = \frac{y+1}{a}$$

よって，求める回転体の体積 V は

$$V = \pi\int_0^{\frac{a-1}{a}} x^2\,dy = \frac{\pi}{a}\int_0^{\frac{a-1}{a}} (y+1)\,dy$$

$$= \frac{\pi}{2a}\Big[\ (y+1)^2\ \Big]_{-1}^{\frac{a-1}{a}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2a^3}(2a-1)^2}$$



(5) (4) の結果から，$f(a)=\dfrac{\pi}{2}a^{-3}(2a-1)^2$ とおくと $\left(a>\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{\pi}{2}\{-3a^{-4}(2a-1)^2+a^{-3}\cdot 4(2a-1)\} \\ &= \frac{\pi}{2}a^{-4}(2a-1)\{-3(2a-1)+4a\} = -\frac{\pi}{2}a^{-4}(2a-1)(2a-3) \end{aligned}$$

したがって，$f(a)$ の増減表は次のようになる．

a	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(a)$		$+$	0	$-$
$f(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，V は $\boldsymbol{a=\dfrac{3}{2}}$ のとき，最大値 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{16}{27}\pi}$

解説 (1) で示したように，a の値によらず，点 $(0,-1)$ は C と D の共有点である．

$C: x^2+y^2=1$ より　$(*)\begin{cases} 2x+2yy'=0, \\ 2+2(y')^2+2yy''=0 \end{cases}$

$D: y=ax^2-1$ より　$(**)\begin{cases} y'=2ax, \\ y''=2a \end{cases}$

これらに共有点 $(0,-1)$ の座標を代入することにより

$$(*) \text{ から } y'=0,\ y''=1, \qquad (**) \text{ から } y'=0,\ y''=2a$$

したがって，共有点 $(0,-1)$ において，C と D の第 1 次導関数の値が等しいから，C と D は，$(0,-1)$ において **1 次の接触**をなす (共通接線をもつ).

とくに，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，C と D の第 1 次・第 2 次導関数の値がともに等しいから，C と D は，$(0,-1)$ において **2 次の接触**をなす．このとき，C と D の点 $(0,-1)$ における接触円 (曲率円) が一致する[1].

なお，y が x の関数であるとき，その曲率 κ は次式で与えられる[2]．また，曲率半径 R は曲率の逆数である

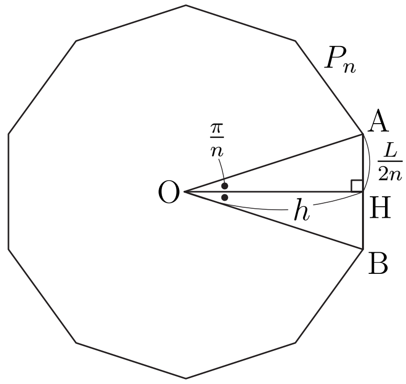
$$\kappa=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R=\frac{1}{\kappa}$$

$y=ax^2-1$ の点 $(0,-1)$ における曲率および曲率半径は　$\kappa=2a,\ \ R=\dfrac{1}{2a}$

とくに，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，$R=1$ となり，C の半径と一致する．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2017.pdf (p.10 を参照)
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf (p.8 を参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 正 n 角形 P_n の 1 つの辺 AB に P_n の外心 O から垂線 OH を引くと



$$\angle\mathrm{AOH} = \frac{\pi}{n},\quad \mathrm{OH} = h,\quad \mathrm{AH} = \frac{L}{2n}$$

したがって　$h\tan\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{L}{2n}$

よって　$\boldsymbol{h = \dfrac{L}{2n\tan\frac{\pi}{n}}}$

(2) △OAB の面積について，(1) の結果を利用すると

$$\frac{S(n)}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{n}\cdot\frac{L}{2n\tan\frac{\pi}{n}}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{S(n) = \frac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}}$$

(3) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ を微分すると $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x - \tan x}{x^2} = \frac{2x - 2\sin x\cos x}{2x^2\cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x}$$

ここで，$g(x) = 2x - \sin 2x$ とおくと $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$g(0) = 0,\quad g'(x) = 2(1 - \cos 2x) > 0$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$g(x) > 0$，すなわち，$f'(x) > 0$

よって，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x)$ は単調増加である．

(4) (2) の結果から　$S(n) = \dfrac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}} = \dfrac{L^2}{4\pi}\cdot\dfrac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}} = \dfrac{L^2}{4\pi}\cdot\dfrac{1}{f\left(\frac{\pi}{n}\right)}$　$\cdots(*)$

$\dfrac{\pi}{n+1} < \dfrac{\pi}{n}$ であるから，(3) の結果より

$$f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < f\left(\frac{\pi}{n}\right)\quad \text{ゆえに}\quad \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{n}\right)} < \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}$$

よって，$(*)$ より　$\boldsymbol{S(n) < S(n+1)}$

(5) $x = \dfrac{\pi}{n}$ とおくと，$(*)$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{x\to+0}\frac{L^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{f(x)}$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\tan x}{x} = 1$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n) = \boldsymbol{\frac{L^2}{4\pi}}$

補足 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n$ は円 (半径 R) に収束するから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n) = \pi R^2 = \frac{(2\pi R)^2}{4\pi} = \frac{L^2}{4\pi}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=t$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{a}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=2\cdot1^2+2t^2-2\cdot1\cdot t\cos\theta=2+2t^2-2t\cos\theta,$$
$$4\sqrt{3}S=4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=2\sqrt{3}t\sin\theta$$

よって
$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-4\sqrt{3}S$$
$$=2+2t^2-2t\cos\theta-2\sqrt{3}t\sin\theta$$
$$=\boldsymbol{2t^2+2-2t(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)}$$

(2) (1) の結果から　$f(\theta)=2t^2+2-4t\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

$0<\theta<\pi$ より，$\frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7}{6}\pi$ であるから，$f(\theta)$ は

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{3}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{2(t-1)^2}$

(3)
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=|\vec{x}|^2+|\vec{x}-\vec{a}|^2+|\vec{x}-\vec{a}|^2$$
$$=3|\vec{x}|^2-2(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$$
$$=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$$
$$=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(1-t\cos\theta+t^2)\quad\cdots(*)$$

よって，$\boldsymbol{\vec{x}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\frac{2}{3}(1-t\cos\theta+t^2)}$

(4) $\frac{4\sqrt{3}}{3}S=\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}t\sin\theta$ であるから，$(*)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}S$$
$$=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(1-t\cos\theta+t^2)-\frac{2\sqrt{3}}{3}t\sin\theta$$
$$=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(t^2-2t+1)+\frac{2}{3}t(2-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)$$
$$=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(t-1)^2+\frac{4}{3}t\left\{1-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right\}\geqq 0$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2\geqq\frac{4\sqrt{3}}{3}S$

等号が成立する場合は　$\boldsymbol{\vec{x}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})}$，$\boldsymbol{t=1}$，$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{3}}$

$\boxed{4}$ 質問に対してA社製ロボットが正しい答え，間違った答えを返す確率をそれぞれ $a,\ \overline{a}$ とし，同様にB社製ロボットが正しい答え，間違った答えを返す確率をそれぞれ $b,\ \overline{b}$ とする $(a=\frac{8}{10},\ \overline{a}=\frac{2}{10},\ b=\frac{1}{10},\ \overline{b}=\frac{9}{10})$.

(1) 案内役ロボットがA社製，B社製である確率は，ともに $\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$
案内役ロボットが「はい」と答える確率は

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\overline{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{10}+\frac{9}{10}\right)=\mathbf{\frac{17}{20}}$$

(2) 案内役ロボットが「はい」と答えたとき，ロボットがA社製である確率は

$$\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\overline{b}}=\frac{a}{a+\overline{b}}=\frac{\frac{8}{10}}{\frac{8}{10}+\frac{9}{10}}=\mathbf{\frac{8}{17}}$$

(3) 案内役ロボットがどちらか，指した道がどちらであるかにより，次の4つの場合がある.

(i) A社製ロボットにA社への道を指した
(ii) B社製ロボットにA社への道を指した
(iii) A社製ロボットにB社への道を指した
(iv) B社製ロボットにB社への道を指した

これらの確率は，すべて $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

したがって，案内ロボットが「はい」と答える確率は

(i) のとき $\dfrac{1}{4}a$,　(ii) のとき $\dfrac{1}{4}\overline{b}$,　(iii) のとき $\dfrac{1}{4}\overline{a}$,　(iv) のとき $\dfrac{1}{4}b$

よって，指した道がA社へ続く道である確率は

$$\frac{\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}\overline{b}}{\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}\overline{b}+\frac{1}{4}\overline{a}+\frac{1}{4}b}=\frac{a+\overline{b}}{(a+\overline{a})+(b+\overline{b})}=\frac{\frac{8}{10}+\frac{9}{10}}{1+1}=\mathbf{\frac{17}{20}}$$

(4) 前問と同様に，(2)，(3) どちらの質問に対しても「はい」と答える確率は

(i) のとき $\dfrac{1}{4}a^2$,　(ii) のとき $\dfrac{1}{4}\overline{b}^2$,　(iii) のとき $\dfrac{1}{4}a\overline{a}$,　(iv) のとき $\dfrac{1}{4}\overline{b}b$

よって，指した道がA社へ続く道である確率は

$$\frac{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}\overline{b}^2}{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}\overline{b}^2+\frac{1}{4}a\overline{a}+\frac{1}{4}\overline{b}b}=\frac{a^2+\overline{b}^2}{a(a+\overline{a})+\overline{b}(b+\overline{b})}=\frac{a^2+\overline{b}^2}{a+\overline{b}}$$

$$=\frac{\left(\frac{8}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^2}{\frac{8}{10}+\frac{9}{10}}=\frac{8^2+9^2}{10(8+9)}=\mathbf{\frac{29}{34}}$$

(5) 案内役ロボットとあとから来たロボットの組合せとその確率は，次のようになる．

① 案内役が A 社製，後からきたのも A 社製のとき $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$

② 案内役が A 社製，後からきたのが B 社製のとき $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{10}$

③ 案内役が B 社製，後からきたのも A 社製のとき $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{10}$

④ 案内役が B 社製，後からきたのが B 社製のとき $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$

案内役ロボットは「はい」，あとから来たロボットが「いいえ」と答える確率は

①のとき $\dfrac{1}{5}a\overline{a}$,　②のとき $\dfrac{3}{10}\overline{a}b$,　③のとき $\dfrac{3}{10}\overline{b}a$,　④のとき $\dfrac{1}{5}b\overline{b}$

したがって，2 体とも A 社製のロボットである確率は

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{5}a\overline{a}}{\frac{1}{5}a\overline{a}+\frac{3}{10}\overline{a}b+\frac{3}{10}\overline{b}a+\frac{1}{5}b\overline{b}} &= \frac{2a\overline{a}}{2a\overline{a}+3\overline{a}b+3\overline{b}a+2b\overline{b}} \\
&= \frac{2\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{10}}{2\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{10}+3\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}+2\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}} \\
&= \frac{2\cdot8\cdot2}{2\cdot8\cdot2+3\cdot2\cdot1+3\cdot9\cdot8+2\cdot1\cdot9} \\
&= \frac{32}{272} = \boldsymbol{\frac{2}{17}}
\end{aligned}
$$