平成30年度　鹿児島大学２次試験前期日程(数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
平成30年2月25日

- 理[数理・物理・地環]・工・医[医]・歯学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から1問選択，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 必答．数II・III・A・B(120分)
- 理[生命化]・農・水産・共同獣医学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から1問選択．数II・A・B(90分)
- 教育[数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育]学部は，$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から1問選択，$\boxed{2}$, $\boxed{8}$ の2題から1問選択．数II・A・Bまたは数III・A・B(90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $\mathrm{AB} = 2$，$\mathrm{BC} = 1$，$\mathrm{CA} = \sqrt{3}$ のとき，三角形ABCの内接円の半径 r を求めよ．

(2) $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y)$ を示せ．

(3) p を素数とするとき，$1 \leqq k \leqq p-1$ を満たす自然数 k に対して，二項係数 ${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $y = x^2$ と直線 $y = 4$ の交点をA，Bとする．点Pが曲線 $y = x^2$ 上を $-2 < x < 2$ の範囲で動くとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 三角形ABPの重心Gの軌跡を求めよ．

(2) (1)で求めた軌跡と直線 $y = 4$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ が自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して関係式

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \quad \cdots (*)$$

を満たすとき,「数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $(*)$ を満たす」という．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 初項と公比がともに $r(\neq 0)$ である等比数列で漸化式 $(*)$ を満たす数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．ただし，$b_1 > c_1$ とする．

(2) 二つの数列 $\{d_n\}$，$\{e_n\}$ がともに漸化式 $(*)$ を満たすとき，二つの実数 k，l に対して $f_n = kd_n + le_n$ で定められる数列 $\{f_n\}$ も漸化式 $(*)$ を満たすことを示せ．

(3) (1) で得られた数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ と二つの実数 k，l に対して，$a_n = kb_n + lc_n$ とおくとき $a_1 = 21$，$a_2 = 57$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{4}$ 三角形 ABC とその内部の点 O があり，正の実数 k，l に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{OB}} + l\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

を満たしていると仮定する．さらに直線 OA と辺 BC，直線 OB と辺 CA，直線 OC と辺 AB の交点をそれぞれ D，E，F とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくとき，x を k，l を用いて表せ．さらに $\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}$ を k，l を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，y を k，l を用いて表せ．さらに $\dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}}$ を k，l を用いて表せ．

(3) $\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}} + \dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}} + \dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{CF}} = 1$ を示せ．

$\boxed{5}$ 1 個のサイコロを投げ，1 の目が出るまでこれを繰り返し行う．ただし，このサイコロ投げを繰り返す最大の回数は N 回とし ($N \geqq 2$)，N 回まで繰り返して 1 の目が出なければ，終了する．このサイコロ投げにおける繰り返し回数を X とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 確率 $P(X = k)$ を，$k < N$ と $k = N$ の場合に分けて求めよ．

(2) X の期待値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{x+1}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，$x \geqq 0$ とする．また，$\log(x+1)$ は $x+1$ の自然対数を表す．

(1) 自然対数の底 e に対して，$t \geqq 0$ のとき $e^t > \dfrac{t^2}{2}$ が成立することを用いて

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$$

を示せ．

(2) $f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，そのグラフをかけ．

(3) 自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して正の数 a_n を，曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a_n$ および x 軸で囲まれた部分の面積が n^2 に等しくなるように定める．この a_n を求めよ．

(4) (3) で定まる数列 $\{a_n\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 複素数平面上の点 z が $|4 - 3i - iz| = 2$ を満たすとする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 点 z の全体が表す図形を求めよ．

(2) $|z|$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) $w = \dfrac{1}{z+1+4i}$ とする．点 w の全体が表す図形を求めよ．さらに，$|w|$ の最小値を与える w を求めよ．ただし，$z \neq -1-4i$ とする．

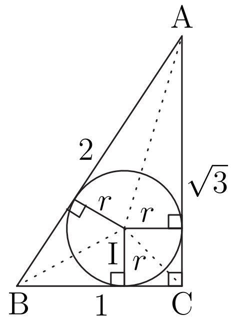
$\boxed{\mathbf{8}}$ 平面上で二つの曲線 $y = \sin x$ と $y = \cos 2x$ を考える．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $y = \sin x$ と $y = \cos 2x$ の共有点を求めよ．

(2) 二つの曲線 $y = \sin x$，$y = \cos 2x$ と二つの直線 $x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

正解

$\boxed{1}$ (1) $\triangle$ABC の内心を I とすると



$$\triangle \mathrm{IBC} + \triangle \mathrm{ICA} + \triangle \mathrm{IAB} = \triangle \mathrm{ABC}$$
$$\frac{1}{2}\cdot 1r + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}r + \frac{1}{2}\cdot 2r = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}$$
$$(1+\sqrt{3}+2)r = \sqrt{3}$$

よって　$r = \dfrac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$

(2)
$$\begin{aligned}\sin(x+y)\sin(x-y) &= (\sin x\cos y + \cos x \sin y)(\sin x \cos y - \cos x \sin y)\\ &= \sin^2 x\cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y\\ &= \sin^2 x(1-\sin^2 y) - (1-\sin^2 x)\sin^2 y\\ &= \sin^2 x - \sin^2 y\end{aligned}$$

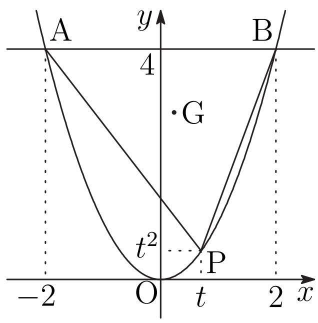
別解
$$\begin{aligned}\sin^2 x - \sin^2 y &= (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y)\\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\cdot 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\cdot 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\ &= \sin(x+y)\sin(x-y)\end{aligned}$$

(3)
$${}_p\mathrm{C}_k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p}{k}\cdot\frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} = \frac{p}{k}\times{}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

素数 p は整数 k $(1 \leqq k \leqq p-1)$ で割り切れない．

よって，${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数である．

$\boxed{2}$ (1) A$(-2,\ 4)$，B$(2,\ 4)$，P$(t,\ t^2)$，G$(x,\ y)$ とおく．
G は三角形 ABP の重心であるから



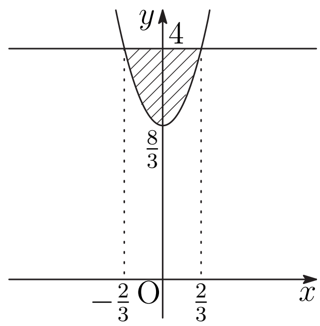
$$x = \frac{-2+2+t}{3}, \quad y = \frac{4+4+t^2}{3}$$

ゆえに　$t = 3x,\ \ t^2 = 3y-8,\ \ (-2 < t < 2)$

上の 2 式から t を消去すると

$$\boldsymbol{y = 3x^2 + \frac{8}{3} \quad \left(-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}\right)}$$

(2) (1) の軌跡と直線 $y=4$ の交点の x 座標は



$$3x^2+\frac{8}{3}=4 \quad これを解いて \quad x=\pm\frac{2}{3}$$

右の図から求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S&=\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{4-\left(3x^2+\frac{8}{3}\right)\right\}dx \\ &=-3\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)dx \\ &=\frac{3}{6}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{32}{27}} \end{aligned}$$

3 (1) 初項と公比がともに $r(\neq 0)$ である等比数列の一般項は　r^n

これを $(*)$ に代入すると

$$r^{n+2}-5r^{n+1}+6r^n=0 \quad ゆえに \quad r^2-5r+6=0$$

したがって　$r=2,\ 3$　よって　$\boldsymbol{b_n=3^n}$，$\boldsymbol{c_n=2^n}$

(2) 漸化式 $(*)$ を満たす数列 $\{d_n\}$，$\{e_n\}$ によって，数列 $\{f_n\}$ が関係式

$$f_n=kd_n+le_n$$

で定められるから $(k,\ l$ は定数)

$$\begin{aligned} f_{n+2}-5f_{n+1}+6f_n&=(kd_{n+2}+le_{n+2})-5(kd_{n+1}+le_{n+1})+6(kd_n+le_n) \\ &=k(d_{n+2}-5d_{n+1}+6d_n)+l(e_{n+2}-5e_{n+1}+6e_n) \\ &=k\cdot 0+l\cdot 0=0 \end{aligned}$$

よって，$\{f_n\}$ も漸化式 $(*)$ を満たす.

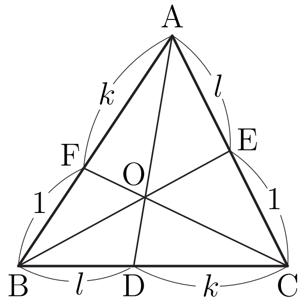
(3) (1) の結果から　$a_n=k\cdot 3^n+l\cdot 2^n$

$a_1=21$，$a_2=57$ であるから

$$\begin{cases} 3k+2l=21 \\ 9k+4l=57 \end{cases} \quad これを解いて \quad k=5,\ l=3$$

よって，求める一般項は　$\boldsymbol{a_n=5\cdot 3^n+3\cdot 2^n}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+l\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}\quad\cdots(*)$



$(*)$ より $\dfrac{k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+l\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{l+k}=-\dfrac{1}{k+l}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\dfrac{1}{k+l}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\quad\cdots$①

よって $\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{k+l}}$

① より $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\dfrac{1}{k+l}(\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}})$ ゆえに $(k+l+1)\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

よって $\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{k+l+1}}$

(2) $(*)$ より $\dfrac{l\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{1+l}=-\dfrac{k}{l+1}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=-\dfrac{k}{l+1}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots$②

よって $\boldsymbol{y=-\dfrac{k}{l+1}}$

② より $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=-\dfrac{k}{l+1}(\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{EB}})$ ゆえに $(k+l+1)\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

よって $\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}}=\dfrac{k}{k+l+1}}$

(3) $(*)$ より $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{k+1}=-\dfrac{l}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=-\dfrac{l}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots$③

③ より $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=-\dfrac{l}{k+1}(\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{FC}})$ ゆえに $(k+l+1)\overrightarrow{\mathrm{OF}}=l\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

よって $\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{CF}}=\dfrac{l}{k+l+1}$

したがって，上式および (1)，(2) の結果から

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}+\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}}+\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{CF}}=\frac{1}{k+l+1}+\frac{k}{k+l+1}+\frac{l}{k+l+1}=1$$

$\boxed{5}$ (1) (i) $1 < k < N$ のとき，$k-1$ 回まで 1 以外の目，k 回目に 1 の目が出る確率であるから

$$P(X=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

1 回目に 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるから，$k=1$ のときも成立する．

よって，$k < N$ のとき　$\boldsymbol{P(X=k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}}$

(ii) $k=N$ のとき，$N-1$ 回目まで 1 以外の目が出る確率であるから

$$\boldsymbol{P(X=N) = \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}}$$

(2) $r = \frac{5}{6}$ とし，求める期待値を $E(X)$ とおくと

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{N-1} k\cdot P(X=k) + N\cdot P(X=N) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} k\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + N\left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + N\left(\frac{5}{6}\right)^{N} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} kr^{k-1} + Nr^N \end{aligned}$$

ここで，$S = \sum_{k=1}^{N} kr^{k-1}$ とおくと　$E(X) = \frac{1}{6}S + Nr^N \quad \cdots (*)$

$$\begin{aligned} S - rS &= \sum_{k=1}^{N} kr^{k-1} - \sum_{k=1}^{N} kr^k = \sum_{k=1}^{N} kr^{k-1} - \sum_{k=2}^{N+1}(k-1)r^{k-1} \\ (1-r)S &= \sum_{k=1}^{N} r^{k-1} - Nr^N = \frac{1-r^N}{1-r} - Nr^N \\ \frac{1}{6}S &= 6(1-r^N) - Nr^N \end{aligned}$$

これを $(*)$ に代入すると　$E(X) = 6(1-r^N) = \boldsymbol{6\left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N\right\}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $t>0$ のとき，$e^t > \dfrac{t^2}{2}$ であるから　$0 < \dfrac{t}{e^t} < \dfrac{2}{t}$

$t = \log(x+1)$ とおくと $(x>0)$，$t>0$ であるから，上式により

$$0 < \frac{\log(x+1)}{x+1} < \frac{2}{\log(x+1)}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\log(x+1)} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$$

(2) $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{x+1}$ より

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x+1}\cdot(x+1) - \log(x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\dfrac{1}{x+1}\cdot(x+1)^2 - \{1-\log(x+1)\}\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-1-2\{1-\log(x+1)\}}{(x+1)^3} = \frac{2\log(x+1)-3}{(x+1)^3}$$

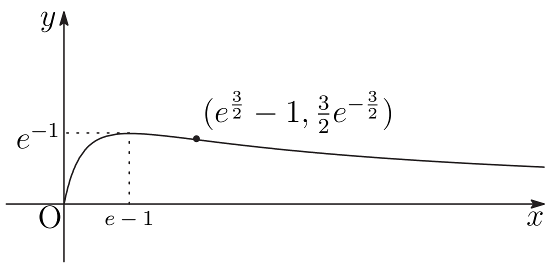
したがって，$f(x)$ の増減および凹凸は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘

また，(1) の結果から　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

よって　極大値 $f(e-1) = \boldsymbol{e^{-1}}$，変曲点 $\left(\boldsymbol{e^{\frac{3}{2}}-1,\ \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}}\right)$

グラフの概形は，下の図のようになる．



(3) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=a_n$ および x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^{a_n}\frac{\log(x+1)}{x+1}\,dx=\frac{1}{2}\Big[\,\{\log(x+1)\}^2\,\Big]_0^{a_n}=\frac{1}{2}\{\log(a_n+1)\}^2$$

この面積が n^2 であるから $(a_n>0)$

$$\frac{1}{2}\{\log(a_n+1)\}^2=n^2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a_n=e^{\sqrt{2}n}-1}$$

(4) (3) の結果を利用して

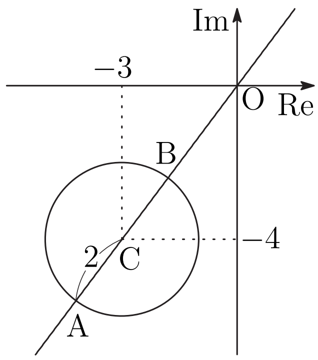
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{2}(n+1)}-1}{e^{\sqrt{2}n}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}n}}{1-e^{-\sqrt{2}n}}=\boldsymbol{e^{\sqrt{2}}}$$

$\boxed{7}$ (1) $|4-3i-iz|=2$ より

$$|i||4-3i-iz|=2 \quad \text{ゆえに} \quad |z+3+4i|=2 \quad \cdots(*)$$

よって，点 z の表す図形は　**中心 $-3-4i$，半径 2 の円**

(2) (1) で求めた円の中心を C とし，右の図のように直線 OC と円の交点を A，B とすると



$$\mathrm{OC}=|-3-4i|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$$

円の半径は 2 であるから

$|z|$ の最大値は　　$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}+2=\mathbf{7}$

$|z|$ の最大値は　　$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}-2=\mathbf{3}$

(3) $z\neq -1-4i$ より，$w=\dfrac{1}{z+1+4i}$ $(\neq 0)$ であるから

$$z=\frac{1}{w}-1-4i$$

これを $(*)$ に代入すると

$$\left|\frac{1}{w}+2\right|=2 \quad \text{ゆえに} \quad |2w+1|=2|w| \quad \text{すなわち} \quad |w|=\left|w+\frac{1}{2}\right|$$

よって，w は 2 点 $0,\ -\dfrac{1}{2}$ を結ぶ垂直二等分線，すなわち，$\boldsymbol{w=-\dfrac{1}{4}}$

また，$|w|$ は点 $-\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\mathbf{\dfrac{1}{4}}$ をとる．

解説 1次分数変換 (メビウス変換)

$$w = \frac{1}{z+1+4i}$$

は，まず，点 z を $-1-4i$ だけ平行移動し，さらに反転 $\dfrac{1}{z}$ を行っている．
このとき，平行移動後の円 $|z+2|=2$ は原点を通るため，反転を行うと直線に変換される．逆に，直線は反転により円に変換される．
本題の直線 $w=-\dfrac{1}{4}$ 上の点

$$w = -\frac{1}{4}(1+i\tan\theta) \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

を反転させると

$$\begin{aligned}\frac{1}{w} &= -\frac{4}{1+i\tan\theta} = -\frac{4\cos\theta}{\cos\theta+i\sin\theta} = -4\cos\theta(\cos\theta-i\sin\theta)\\ &= -2(2\cos^2\theta-2i\sin\theta\cos\theta) = -2(\cos 2\theta+1-i\sin 2\theta)\\ &= -2-2(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)\\ &= -2+2\{\cos(\pi-2\theta)+i\sin(\pi-2\theta)\} \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

これは，点 -2 を中心とする半径 2 の円を表す．
なお，原点を通らない円 $|z-a|=r$ は，反転により円に変換される．

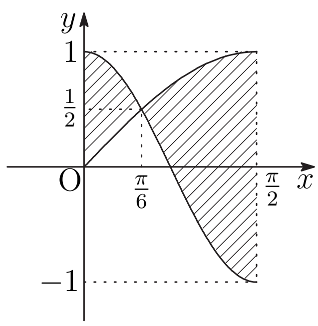
$\boxed{8}$ (1) $y=\sin x$ と $y=\cos 2x$ から，y を消去すると

$$\sin x = \cos 2x \quad ゆえに \quad \sin x = 1-2\sin^2 x$$

したがって　$(\sin x+1)(2\sin x-1)=0$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意して，これを解くと　$x=\dfrac{\pi}{6}$

よって，求める交点の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}},\ \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}\right)$



(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x-\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos 2x)\,dx\\ &= \left[\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{3}-1}\end{aligned}$$