

平成 30 年度 佐賀大学 2 次試験後期日程 (数学問題)

理工・農学部 平成 30 年 3 月 12 日

• 理工学部は , [1] ~ [4] 数 I・II・III・A・B (120 分)

• 農学部は , [1] , [2] , [5] , [6] 数 I・II・A・B (120 分)

[1] 点 $(0, a)$ を中心とする半径 2 の円 C の周上に 3 点 $P(s, t)$, $Q(-s, t)$, $R(x, y)$ をとる . このとき , 次の問に答えよ .

(1) \overrightarrow{RP} と \overrightarrow{RQ} の内積を a, t, y を用いて表せ .

(2) $a = 0, s \geq 0, t \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$ のとき , (1) の内積の最小値とそのときの s, t, x, y の値を求めよ .

(3) $y = a$ のとき , (1) の内積の最大値とそのときの s の値を求めよ .

[2] k は定数とする . 関数

$$f(x) = x^3 - 3kx^2 - 2k^2x$$

が $x = \alpha$ で極大値 , $x = \beta$ で極小値をとる . ただし , $-1 < \alpha < 1 < \beta$ とする . このとき , 次の問に答えよ .

(1) k のとり得る値の範囲を求めよ .

(2) $\beta - \alpha$ を k を用いて表せ .

(3) $f(\alpha) - f(\beta)$ を k を用いて表せ .

[3] a, b, c は定数とし ,

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

とする . このとき , 次の問に答えよ .

(1) $f(x)$ が相異なる極値をもつための条件を求めよ .

(2) $f(x)$ がただ 1 つの極値として極大値をもつための条件を求めよ . さらに , $f(x)$ が極大値をとる x の値 x_0 を求めよ .

(3) (2) の条件が満たされているとき , 2 直線 $y = 0, x = x_0$ および曲線 $y = f(x)$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ .

- 4 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ で定義された 2 曲線 $C_1: y = \sin x$, $C_2: y = \cos x$ および $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ で定義された曲線 $C_3: y = \tan 2x$ について, 次の問に答えよ.

- (1) C_2 と C_3 の交点の x 座標を a とおくととき, $\sin a$ の値を求めよ.
- (2) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ において, 不等式 $\sin x < \tan 2x$ が成り立つことを示せ.
- (3) 3 曲線 C_1, C_2, C_3 で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

- 5 次の問に答えよ.

- (1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で $\cos \theta = \frac{3}{5}$ のとき, $\cos \left(2\theta + \frac{\pi}{3} \right)$ の値を求めよ.
- (2) 数列 $\{a_n\}$ が関係式

$$a_1 = 1, \quad \log_3 \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき, 一般項 a_n を求めよ.

- 6 n, m を自然数とし, p, q を相異なる素数とする. ただし, $p \geq 5$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) n が積 pq で割り切れるとき, n 以下の自然数で p の倍数または q の倍数となるものの個数 N_1 を p, q, n を用いて表せ.
- (2) $n = 2p^m$ であるとき, n 以下の自然数で n と互いに素であるものの個数 N_2 を p, m を用いて表せ.
- (3) $n = 6p^m$ であるとき, n 以下の自然数で n と互いに素であるものの個数 N_3 を p, m を用いて表せ.

正解

1 (1) $P(s, t)$, $Q(-s, t)$, $R(x, y)$ より

$$\overrightarrow{RP} = (s - x, t - y), \quad \overrightarrow{RQ} = (-s - x, t - y)$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} &= (s - x)(-s - x) + (t - y)^2 \\ &= x^2 - s^2 + t^2 - 2ty + y^2 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$R(x, y)$, $P(s, t)$ は C 上の点であるから

$$x^2 + (y - a)^2 = 4, \quad s^2 + (t - a)^2 = 4$$

上の第1式から第2式の辺々を引くと

$$\begin{aligned} x^2 - s^2 + (y - a)^2 - (t - a)^2 &= 0 \\ x^2 - s^2 &= -y^2 + 2ay + t^2 - 2at \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ② から x, s を消去すると

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = 2t^2 - 2at + 2ay - 2ty$$

(2) $a = 0$ を (1) の結果に代入すると

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = 2t^2 - 2ty = 2 \left(t - \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{y^2}{2} \quad \cdots (*)$$

このとき, C は原点を中心とする半径2の円で, $P(s, t)$, $R(x, y)$ はこの円周上の $s \geq 0, t \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$ を満たす点であるから, $(*)$ を最小とするのは

$$t - \frac{y}{2} = 0, \quad y = 2 \quad \text{すなわち} \quad x = 0, \quad y = 2, \quad s = \sqrt{3}, \quad t = 1$$

このとき, $(*)$ は, 最小値 -2 をとる.

(3) $y = a$ を (1) の結果に代入すると

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = 2t^2 - 4at + 2a^2 = 2(t - a)^2 \quad \cdots (**)$$

このとき, C は点 $(0, a)$ を中心とする半径2の円で, $P(s, t)$ はこの円周上の点であるから

$$a - 2 \leq t \leq a + 2$$

よって, $t = a \pm 2$, すなわち, $s = 0$ のとき, $(**)$ は最大値8をとる.

2 (1) $f(x) = x^3 - 3kx^2 - 2k^2x$ より $f'(x) = 3x^2 - 6kx - 2k^2 \quad \dots (*)$

$f'(x) = 0$ の解 α, β が $-1 < \alpha < 1 < \beta$ を満たすから, $f'(-1) > 0$, $f'(1) < 0$ より

$$\begin{cases} 3 + 6k - 2k^2 > 0 \\ 3 - 6k - 2k^2 < 0 \end{cases}$$

第1式を解いて $\frac{3 - \sqrt{15}}{2} < k < \frac{3 + \sqrt{15}}{2}$

第2式を解いて $k < \frac{-3 - \sqrt{15}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{15}}{2} < k$

これらの共通範囲を求めて $\frac{-3 + \sqrt{15}}{2} < k < \frac{3 + \sqrt{15}}{2}$

(2) $f'(x) = 0$, すなわち, $3x^2 - 6kx - 2k^2 = 0$ の解が α, β であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2k, \quad \alpha\beta = -\frac{2}{3}k^2$$

したがって $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$$= (2k)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}k^2\right) = \frac{20}{3}k^2$$

$\beta - \alpha > 0$, また, (1) の結果から $k > 0$ であるから

$$\beta - \alpha = \frac{2\sqrt{15}}{3}k$$

(3) (*) および $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ より, $f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$ であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx = 3 \int_{\beta}^{\alpha} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -3 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -3 \left(-\frac{1}{6}\right) (\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{15}}{3}k\right)^3 \\ &= \frac{20\sqrt{15}}{9}k^3 \end{aligned}$$

3 (1) $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ より

$$f'(x) = \{-ax^2 + (2a - b)x + b - c\}e^{-x} \quad \cdots (*)$$

$f(x)$ が相異なる極値をもつための条件は、2 次方程式

$$-ax^2 + (2a - b)x + b - c = 0$$

が相異なる実数解をもつことであるから

$$-a \neq 0, \quad (2a - b)^2 - 4(-a)(b - c) > 0$$

よって $a \neq 0, \quad 4a^2 + b^2 - 4ac > 0$

(2) $f(x)$ がただ 1 つの極値をもつから、(*) より

$$-ax^2 + (2a - b)x + b - c$$

が x の 1 次式であるから $-a = 0$ すなわち $a = 0$

さらに、それが極大値であるから、1 次式

$$-bx + b - c$$

の 1 次の係数について $-b < 0$ すなわち $b > 0$

したがって、求める条件は $a = 0, b > 0$

また、 $f(x)$ が極大値をとる x の値 x_0 は、 $b \neq 0$ に注意して

$$-bx_0 + b - c = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x_0 = 1 - \frac{c}{b}$$

(3) (2) の条件を満たすとき、曲線 $y = f(x)$ 、すなわち、 $y = (bx + c)e^{-x}$ は、直線 $y = 0$ と $x = -\frac{c}{b}$ で交わり、区間 $-\frac{c}{b} \leq x \leq 1 - \frac{c}{b}$ において、 $b > 0$ より、 $f(x) \geq 0$ であるから、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{c}{b}}^{1-\frac{c}{b}} (bx + c)e^{-x} dx = - \left[(bx + c + b)e^{-x} \right]_{-\frac{c}{b}}^{1-\frac{c}{b}} \\ &= \left[(bx + c + b)e^{-x} \right]_{1-\frac{c}{b}}^{-\frac{c}{b}} = be^{\frac{c}{b}} - 2be^{-1+\frac{c}{b}} = be^{\frac{c}{b}}(1 - 2e^{-1}) \end{aligned}$$

補足 部分積分法により、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int e^{kx} f(x) dx &= \frac{e^{kx}}{k} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots \right\} + C \\ \int e^{-x} f(x) dx &= -e^{-x} \{ f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots \} + C \end{aligned}$$

- 4 (1) C_2 と C_3 の交点の x 座標が a であるから $\cos a = \tan 2a$

$$\text{ここで} \quad \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{2 \sin a \cos a}{1 - 2 \sin^2 a}$$

$$\text{したがって} \quad \cos a = \frac{2 \sin a \cos a}{1 - 2 \sin^2 a}$$

$$0 \leq a < \frac{\pi}{4} \text{ より, } \cos a \neq 0 \text{ に注意して整理すると}$$

$$2 \sin^2 a + 2 \sin a - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$0 \leq a < \frac{\pi}{4} \text{ より, } 0 \leq \sin a < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ に注意して } \sin a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

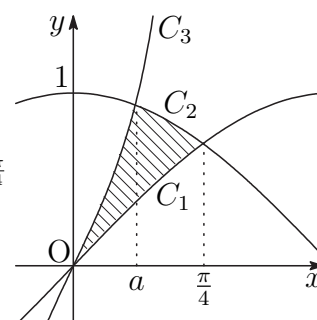
- (2) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ において

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} > 2 \tan x = \frac{2}{\cos x} \cdot \sin x > \sin x$$

$$\text{よって } 0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ において } \sin x < \tan 2x$$

- (3) 求める面積 S は, 右の図の斜線部分である.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \tan 2x \, dx + \int_a^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \log |\cos 2x| \right]_0^a + \left[\sin x \right]_a^{\frac{\pi}{4}} + \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \log |\cos 2a| - \sin a + \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$



$$\text{ここで, } \textcircled{1} \text{ を利用して } \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \sin a = \sqrt{3} - 1$$

$$\text{よって } S = -\frac{1}{2} \log(\sqrt{3} - 1) - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \sqrt{2} - 1$$

$$= -\frac{1}{2} \log(\sqrt{3} - 1) - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

5 (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos 2\theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2\theta \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta\end{aligned}$$

$\cos \theta = \frac{3}{5} \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ であるから, $\sin \theta > 0$ より

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}, \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}, \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}\end{aligned}$$

よって $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{24}{25} = -\frac{7 + 24\sqrt{3}}{50}$

(2) 与えられた漸化式から $\log_3 a_{n+1} - \log_3 a_n = 2^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

$$\begin{aligned}n \geq 2 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (\log_3 a_{k+1} - \log_3 a_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ \log_3 a_n - \log_3 a_1 &= \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \quad (a_1 = 1) \\ \log_3 a_n - \log_3 1 &= 2^n - 2 \\ a_n &= 3^{2^n - 2}\end{aligned}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから $a_n = 3^{2^n - 2}$

6 (1) n が pq で割り切れるとき (p, q は相異なる素数)

p の倍数の個数は $\frac{n}{p}$, q の倍数の個数は $\frac{n}{q}$, pq の倍数の個数は $\frac{n}{pq}$

したがって, p の倍数または q の倍数の個数 N_1 は

$$N_1 = \frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq} = n \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{pq} \right)$$

(2) 一般に, $n = p^i q^j$ のとき (p, q は相異なる素数, i, j は自然数), n 以下の自然数で

p の倍数の個数は $\frac{n}{p}$, q の倍数の個数は $\frac{n}{q}$, pq の倍数の個数は $\frac{n}{pq}$

n 以下の自然数で, n と互いに素であるものの個数 N_2 は¹

$$N_2 = n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq} \right) = n \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right)$$

ここでは, $n = 2p^m$ であるから

$$N_2 = n \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right) = p^m \left(1 - \frac{1}{p} \right)$$

(3) 一般に, $n = p^i q^j r^k$ のとき (p, q, r は相異なる素数, i, j, k は自然数), n 以下の自然数で

p の倍数の個数は $\frac{n}{p}$, q の倍数の個数は $\frac{n}{q}$, r の倍数の個数は $\frac{n}{r}$,

pq の倍数の個数は $\frac{n}{pq}$, qr の倍数の個数は $\frac{n}{qr}$, rp の倍数の個数は $\frac{n}{rp}$,

pqr の倍数の個数は $\frac{n}{pqr}$,

n 以下の自然数で, n と互いに素であるものの個数 N_3 は

$$\begin{aligned} N_3 &= n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} + \frac{n}{r} - \frac{n}{pq} - \frac{n}{qr} - \frac{n}{rp} + \frac{n}{pqr} \right) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right) \left(1 - \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

ここでは, $n = 6p^m = 2 \cdot 3p^m$ であるから (p は 5 以上の素数)

$$N_3 = n \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right) = 2p^m \left(1 - \frac{1}{p} \right)$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf **1** を参照