

平成 30 年度 福岡教育大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
中等教育 (数学専攻) 平成 30 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 次の各問いに答えよ．

- (1) $\log_4(x-5) - 1 \leq \log_{16} x$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．
- (2) $x^2 - 10x - 10$ が整数の平方となるような整数 x をすべて求めよ．
- (3) 複素数平面上の単位円に内接する正六角形がある．この 6 個の頂点に対応する複素数は反時計まわりに $1, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ であるとする．実数 t に対して, $z = 1 + tz_1$ とおくと, $w = \frac{z - z_3}{z_4 - z_3}$ が純虚数になるように t の値を定めよ．また, そのときの w の値を求めよ．

2 四面体 OABC がある．辺 OA の中点を M, 辺 BC の中点を N とし, 辺 OC を $p : 1 - p$ ($0 < p < 1$) に内分する点を P, 辺 AB を $p : 1 - p$ に内分する点を Q とする． $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, 次の問いに答えよ．

- (1) \overrightarrow{PM} を \vec{a}, \vec{c} および p を用いて表せ．
- (2) \overrightarrow{PN} を \vec{b}, \vec{c} および p を用いて表せ．
- (3) \overrightarrow{PQ} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および p を用いて表せ．
- (4) \overrightarrow{PQ} は $s\overrightarrow{PM} + t\overrightarrow{PN}$ (s, t は実数) の形に表されることを示せ．

3 0 から 9 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある．次の問いに答えよ．

- (1) 書かれた整数の和が 3 の倍数になる 3 枚のカードの組合せの総数を求めよ．
- (2) 10 枚から 4 枚を同時に選ぶとき, それら 4 枚に書かれた整数の和が偶数になる確率を求めよ．
- (3) はじめ 10 枚あるカードの中から, 1 回に 1 枚ずつ選び, 0 が書かれたカードを選ぶまで繰り返す．選んだすべてのカードに書かれた整数の和が 10 以上になる確率を求めよ．ただし, 1 回選んだカードは次回以降の選択肢から除くものとする．

4 a を定数とし, $f(x) = e^{ax} \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) とする. ただし, e は自然対数の底とする. 次の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\int_0^\pi f(x) dx$ を求めよ.

(2) $a = \sqrt{3}$ のとき, 関数 $y = f(x)$ について第 2 次導関数まで求めて増減を調べ, そのグラフをかけ.

正解

1 (1) $\log_4(x-5) - 1 \leq \log_{16} x \quad \cdots (*)$

真数は正であるから

$$x-5 > 0 \quad \text{かつ} \quad x > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\log_4(x-5) = \log_{16}(x-5)^2$ より, $(*)$ は

$$\log_{16}(x-5)^2 \leq \log_{16} 16x$$

底 16 は 1 より大きいから

$$(x-5)^2 \leq 16x \quad \text{整理すると} \quad x^2 - 26x + 25 \leq 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (x-1)(x-25) \leq 0 \quad \text{すなわち} \quad 1 \leq x \leq 25$$

求める実数 x の範囲は, $\textcircled{1}$ に注意して $5 < x \leq 25$

(2) $x^2 - 10x - 10 = n^2$ (n は整数) とおくと

$$(x-5)^2 - n^2 = 35 \quad \text{ゆえに} \quad (|x-5| + |n|)(|x-5| - |n|) = 35$$

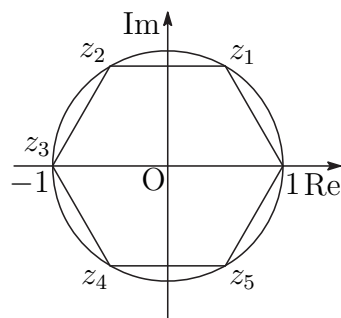
$$\text{したがって} \quad \begin{cases} |x-5| + |n| = 35 \\ |x-5| - |n| = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} |x-5| + |n| = 7 \\ |x-5| - |n| = 5 \end{cases}$$

$$\text{ゆえに} \quad \begin{cases} |x-5| = 18 \\ |n| = 17 \end{cases}, \quad \begin{cases} |x-5| = 6 \\ |n| = 1 \end{cases}$$

$$\text{よって} \quad x = 23, -13, 11, -1$$

(3) $z_4 - z_3 = z_5$, $\frac{1}{z_5} = z_1$ であるから

$$\begin{aligned} w &= \frac{z - z_3}{z_4 - z_3} = \frac{1 + tz_1 - z_3}{z_5} \\ &= z_1(1 + tz_1 - z_3) \\ &= z_1 + tz_2 - z_4 = z_1 + tz_2 - (-z_1) \\ &= 2z_1 + tz_2 \end{aligned}$$



$$\text{ゆえに} \quad w = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + t \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 - \frac{t}{2} + (t+2) \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w \text{ は, 純虚数であるから} \quad 1 - \frac{t}{2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = 2, \quad w = 2\sqrt{3}i$$

2 (1) $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} - p\vec{c}$

(2) $\begin{aligned}\overrightarrow{PN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) - p\vec{c} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - p\right)\vec{c}\end{aligned}$

(3) $\overrightarrow{OQ} = (1-p)\vec{a} + p\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1-p)\vec{a} + p\vec{b} - p\vec{c}$$

(4) $\overrightarrow{PQ} = s\overrightarrow{PM} + t\overrightarrow{PN}$ に (1) ~ (3) の結果を代入すると

$$\begin{aligned}(1-p)\vec{a} + p\vec{b} - p\vec{c} &= s\left(\frac{1}{2}\vec{a} - p\vec{c}\right) + t\left\{\frac{1}{2}\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - p\right)\vec{c}\right\} \\ &= \frac{s}{2} + \frac{t}{2}\vec{b} + \left(-sp + \frac{t}{2} - pt\right)\vec{c}\end{aligned}$$

$\frac{s}{2} = 1-p, \frac{t}{2} = p$, すなわち , $s = 2-2p, t = 2p$ とすると

$$\begin{aligned}-sp + \frac{t}{2} - pt &= -(2-2p)p + \frac{2p}{2} - p \cdot 2p \\ &= -2p + 2p^2 + p - 2p^2 = -p\end{aligned}$$

よって $\overrightarrow{PQ} = (2-2p)\overrightarrow{PM} + 2p\overrightarrow{PN}$

3 (1) $A = \{0, 3, 6, 9\}, B = \{1, 4, 7\}, C = \{2, 5, 8\}$ とする .

3 枚のカードの和が 3 の倍数になる組合せは , A から 3 枚 , B から 3 枚 , C から 3 枚 , A, B, C からそれぞれ 1 枚ずつの場合であるから

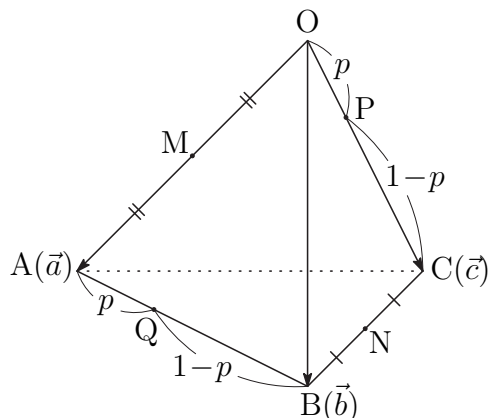
$${}_4C_3 + {}_3C_3 + {}_3C_3 + {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 4 + 1 + 1 + 4 \cdot 3 \cdot 3 = 42 \text{ (通り)}$$

(2) $X = \{0, 2, 4, 6, 8\}, Y = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ とする .

4 枚のカードの和が偶数になる組合せは , X から 4 枚 , X, Y からそれぞれ 2 枚 , Y から 4 枚の場合であるから , その総数は

$${}_5C_4 + {}_5C_2 \cdot {}_5C_2 + {}_5C_4 = 5 + 10 \cdot 10 + 5 = 110 \text{ (通り)}$$

よって , 求める確率は $\frac{110}{{}_{10}C_4} = \frac{110}{210} = \frac{11}{21}$



- (3) 0 が書かれたカードを選ぶまでに，選んだすべてのカードに書かれた整数の和が 10 未満である確率をまず求める．

(i) 1 回目に 0 が出るとき その確率は $\frac{1}{10}$

(ii) 2 回目に 0 が出るとき その確率は $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$

- (iii) 3 回目に 0 が出るとき

2 回目までに目の和が 10 未満である組合せは，次の 16 通り．

目の和が 3 である組合せは $\{1, 2\}$

目の和が 4 である組合せは $\{1, 3\}$

目の和が 5 である組合せは $\{1, 4\}, \{2, 3\}$

目の和が 6 である組合せは $\{1, 5\}, \{2, 4\}$

目の和が 7 である組合せは $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$

目の和が 8 である組合せは $\{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}$

目の和が 9 である組合せは $\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$

その確率は $\frac{16 \cdot 2!}{10 \cdot 9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{45}$

- (iv) 4 回目に 0 が出るとき

3 回目までに目の和が 10 未満である組合せは，次の 7 通り．

目の和が 6 である組合せは $\{1, 2, 3\}$

目の和が 7 である組合せは $\{1, 2, 4\}$

目の和が 8 である組合せは $\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}$

目の和が 9 である組合せは $\{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}$

その確率は $\frac{7 \cdot 3!}{10 \cdot 9 \cdot 8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{120}$

- (v) 5 回目以降に 0 が出るとき，4 回目までの目は 10 以上である．

(i) ~ (v) より，0 が書かれたカードが選ぶまでに，書かれた整数の和が 10 未満である確率は

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{45} + \frac{1}{120} = \frac{91}{360}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{91}{360} = \frac{269}{360}$$

$$\boxed{4} \quad (1) \quad (e^{ax} \sin x)' = e^{ax}(a \sin x + \cos x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(e^{ax} \cos x)' = e^{ax}(-\sin x + a \cos x) \quad \cdots \textcircled{2}$$

① $\times a$ - ② より

$$(ae^{ax} \sin x - e^{ax} \cos x)' = (a^2 + 1)e^{ax} \sin x$$

ゆえに $\int e^{ax} \sin x \, dx = \frac{1}{a^2 + 1} e^{ax} (a \sin x - \cos x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$

よって $\int_0^\pi f(x) \, dx = \frac{1}{a^2 + 1} \left[e^{ax} (a \sin x - \cos x) \right]_0^\pi = \frac{e^{a\pi} + 1}{a^2 + 1}$

(2) ① より, $a = \sqrt{3}$ のとき

$$f'(x) = e^{\sqrt{3}x} (\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 2e^{\sqrt{3}x} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right),$$

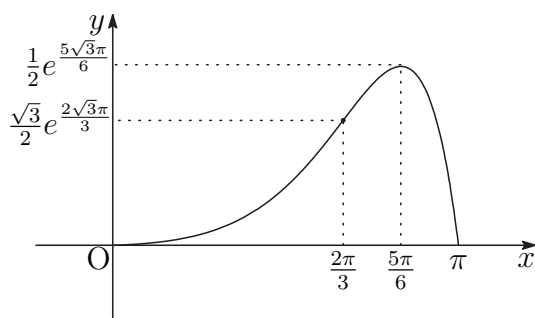
$$\begin{aligned} f''(x) &= 2e^{\sqrt{3}x} \left\{ \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &= 4e^{\sqrt{3}x} \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

増減および凹凸は次のようになる.

x	0	\cdots	$\frac{2\pi}{3}$	\cdots	$\frac{5\pi}{6}$	\cdots	π
$f'(x)$		+	+	+	0	-	
$f''(x)$		+	0	-	-	-	
$f(x)$	0	\nearrow	変曲点	\curvearrowright	極大	\searrow	0

よって 極大値 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{5\sqrt{3}\pi}{6}}$ 変曲点 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}}\right)$

グラフの概形は, 次のようになる.



補足 $z = a + bi$, $r = |z|$, $\theta = \arg z$ とすると¹

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \{e^{ax} \cos bx\} &= r e^{ax} \cos(bx + \theta), \\ \frac{d}{dx} \{e^{ax} \sin bx\} &= r e^{ax} \sin(bx + \theta)\end{aligned}$$

さらに , 次式が成立する .

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n} \{e^{ax} \cos bx\} &= r^n e^{ax} \cos(bx + n\theta), \\ \frac{d^n}{dx^n} \{e^{ax} \sin bx\} &= r^n e^{ax} \sin(bx + n\theta)\end{aligned}$$

逆に次の積分を得る .

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \cos bx \, dx &= \frac{1}{r} e^{ax} \cos(bx - \theta) + C, \\ \int e^{ax} \sin bx \, dx &= \frac{1}{r} e^{ax} \sin(bx - \theta) + C\end{aligned}$$

本題では , $f(x) = e^{\sqrt{3}x} \sin x$ であるから , $z = \sqrt{3} + i$ とすると

$$r = |z| = 2, \quad \theta = \arg z = \frac{\pi}{6}$$

したがって

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2e^{\sqrt{3}x} \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right), \\ f''(x) &= 2^2 e^{\sqrt{3}x} \sin \left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 4e^{\sqrt{3}x} \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

また , $f(x) = e^{\sqrt{3}x} \sin x$ の不定積分は次のようになる .

$$\int f(x) \, dx = \frac{1}{2} e^{\sqrt{3}x} \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + C$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2018_kouki.pdf [2] を参照 .