

## 平成 30 年度 長崎大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

平成 30 年 2 月 25 日

- 教育 A・経済・水産・環境科学部は, [1], [2] 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育 B・薬学部は, [3], [4], [5], [7] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部は, [3], [4], [5], [6] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は, [3], [4], [7], [8] 数 I・II・III・A・B (120 分)

[1] 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

- (1) 関数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{6}$  の極値を求めよ．さらに, 3 次方程式  $f(x) = k$  が, 異なる正の解を 2 個, 負の解を 1 個もつように, 定数  $k$  の値の範囲を定めよ．
- (2)  $0 < \theta < \pi$  で  $\tan \theta = -2\sqrt{2}$  のとき,  $\cos \theta$  と  $\cos \frac{\theta}{2}$  の値を求めよ．
- (3) 数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする．

$$S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つとき, 初項  $a_1$  および一般項  $a_n$  を求めよ．

- (4) 座標平面上に原点  $O$ , 点  $A(5, 2)$ , 点  $B(11, 10)$  がある．条件  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$  を満たす点  $P(x, y)$  の軌跡を求めよ．さらに,  $|\overrightarrow{OP}|$  の最大値と最小値, およびそのときの  $P$  の座標をそれぞれ求めよ．

[2] 関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ 2x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

と定義する．曲線  $C: y = f(x)$  の上に 2 点  $A(-a, a^2)$ ,  $B(a, 2a^2)$  がある．ただし,  $a$  は正の定数とする．以下の問いに答えよ．

- (1) 直線  $AB$  の方程式を求めよ．また, 線分  $AB$  の長さを求めよ．
- (2) 曲線  $C$  と直線  $AB$  で囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ．
- (3) 2 点  $A, B$  における曲線  $C$  の接線を, それぞれ  $\ell, m$  とする． $\ell, m$  の方程式を求めよ．さらに,  $\ell$  と  $m$  の交点  $D$  の座標を求めよ．
- (4) 直線  $AB$  と直線  $\ell$  が直交するように,  $a$  の値を定めよ．このとき, 曲線  $C$  と 2 直線  $\ell, m$  とで囲まれる図形の面積  $T$  を求めよ．

**3** 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

- (1) 数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする．

$$S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つとき，初項  $a_1$  および一般項  $a_n$  を求めよ．

- (2)  $\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = A$  とするとき，

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2$$

の値を  $A$  を用いて表せ．

- (3) 方程式

$$\log_2 x^2 = 2 + \log_2 |x - 2|$$

を解け．

- (4) 関数  $f(x)$  を

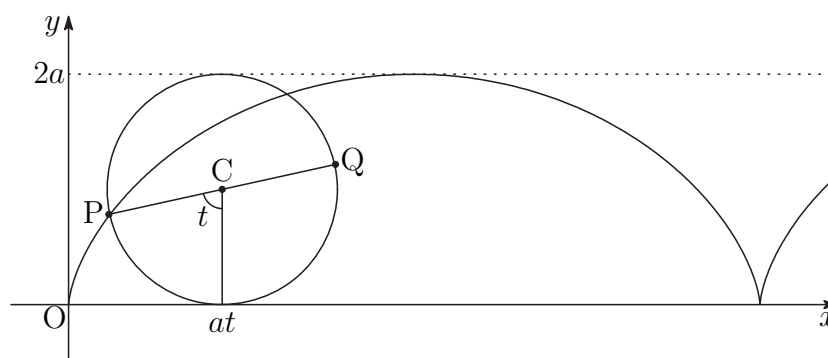
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

と定義する．「微分係数の定義」にしたがって， $f(x)$  の  $x = 0$  における微分係数を求めよ．

- 4 半径  $a$  の円が  $x$  軸上を滑ることなく正の方向に回転していくとき、円周上の 2 つの定点  $P$  と  $Q$  の運動について考える．時刻  $t = 0$  のとき  $P$  は原点  $O$  にあり、 $Q$  は点  $(0, 2a)$  にある．円は毎秒 1 ラジアンで回転する．このとき、点  $P$  の時刻  $t$  における座標  $(x, y)$  は

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

で表される．以下の問いに答えよ．



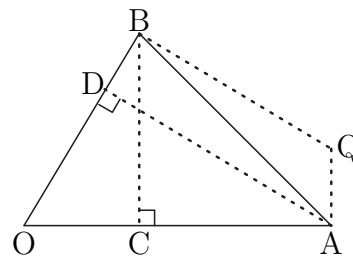
- (1) 時刻  $t$  における円の中心  $C$  と点  $Q$  の座標を、それぞれ求めよ．
  - (2) 時刻  $t$  における点  $P$  の速度ベクトル  $\vec{v_P} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$  を求めよ．また、時刻  $t$  が  $0 \leq t \leq 2\pi$  の範囲において、速さ  $|\vec{v_P}|$  の最大値と最小値、およびその時の  $P$  の座標を求めよ．
  - (3) 時刻  $t$  における点  $Q$  の速度ベクトル  $\vec{v_Q}$  を求めよ．さらに、内積  $\vec{v_P} \cdot \vec{v_Q}$  を求めよ．
  - (4) 時刻  $t = \frac{\pi}{2}$  から  $t = \frac{3\pi}{2}$  までの間に点  $P$  が動く道のり  $L_P$  と、点  $Q$  が動く道のり  $L_Q$  を、それぞれ求めよ．
- 5 関数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$  がある．曲線  $C: y = f(x)$  の変曲点を  $P$  とする．以下の問いに答えよ．
- (1) 関数  $y = f(x)$  の増減および凹凸を調べ、極値および  $P$  の座標を求めよ．
  - (2) 曲線  $C$  上の点  $P$  における接線を  $\ell$  とする．また、 $P$  を通り  $\ell$  に垂直な直線を  $m$  とする． $\ell, m$  の方程式を求めよ．
  - (3) 直線  $m$  と曲線  $C$  との交点で、 $P$  と異なる点を  $Q, R$  とする．ただし、 $Q$  の  $x$  座標は  $R$  の  $x$  座標より小さいものとする．このとき、 $C$  と線分  $PR$  とで囲まれる図形  $F$  の面積  $S$  を求めよ．
  - (4)  $P$  を通り、図形  $F$  の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ．

6 三角形 OAB において

$$OA = a, \quad OB = b, \quad \angle O = \theta$$

とおく．ただし， $0 < b \leq a$ ， $0 < \theta < \pi$  である．また，点 C と D は，それぞれ，直線 OA と OB 上にあり， $CB \perp OA$ ， $DA \perp OB$  を満たす．

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とするとき，この三角形の外心 P について調べる．以下の問いに答えよ．



- (1)  $\overrightarrow{OC}$  を  $a, b, \theta, \vec{a}$  を用いて表せ．また， $\overrightarrow{OD}$  を  $a, b, \theta, \vec{b}$  を用いて表せ．
- (2) OA の A を通る垂線と，OB の B を通る垂線との交点を Q とする．このとき， $\overrightarrow{AQ} = \ell \overrightarrow{CB}$ ， $\overrightarrow{BQ} = m \overrightarrow{DA}$  となる実数  $\ell, m$  がある． $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ}$  であることに注意して， $\ell$  と  $m$  の値を  $a, b, \theta$  を用いて表せ．
- (3) Q が (2) の点であるとき，

$$\overrightarrow{OQ} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

となる実数  $p, q$  がある． $p$  と  $q$  の値を  $a, b, \theta$  を用いて表せ．また，

$$\overrightarrow{OP} = r\vec{a} + s\vec{b}$$

を満たす  $r$  と  $s$  の値を  $a, b, \theta$  を用いて表せ．

7  $t$  を正の実数とし，複素数平面上に 2 点  $A(t)$ ， $B\left(-\frac{1}{t}\right)$  がある．等式

$$t \left| z + \frac{1}{t} \right| = \frac{1}{t} |z - t| \tag{a}$$

を満たす点  $P(z)$  の全体が表す図形を  $F$  とする．下の小問 (1) から (4) を通して  $F$  がどのような図形を表すか調べたい．以下の問いに答えよ．

- (1) A と B はどちらも図形  $F$  の点ではないことを示せ．
- (2)  $t = 1$  ならば， $F$  はどのような図形を表すか．
- (3)  $t \neq 1$  とする．図形  $F$  の点  $P(z)$  が直線 AB 上に位置するような  $z$  の値は 2 つある．その値  $z_1$  と  $z_2$  を求めよ．ただし， $|z_1| < |z_2|$  とする．
- (4)  $t \neq 1$  とする．2 点  $P_1(z_1)$ ， $P_2(z_2)$  を結ぶ線分の中点を  $M(m)$  として， $m$  の値を求めよ．また， $P(z)$  が図形  $F$  の点であるとき， $|z - m|$  の値を求めよ．さらに， $F$  はどのような図形を表すか．

8 積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$$

について，以下の問いに答えよ．ただし， $0! = 1$  と定める．

- (1) 部分積分を利用して， $F_2(x)$  を  $F_1(x)$  を用いて表せ．同様に， $F_1(x)$  を  $F_0(x)$  を用いて表せ．
- (2)  $F_0(x)$  を計算し，積分を含まない式として表せ．その結果を利用して， $F_1(x)$  を積分を含まない式として表せ．さらに， $F_2(x)$  を積分を含まない式として表せ．
- (3)  $n \geq 1$  のとき， $F_n(x)$  を  $F_{n-1}(x)$  を用いて表せ．さらに， $n \geq 0$  のとき， $F_n(x)$  を積分を含まない式として表せ．
- (4)  $p(x) = x^n$  とおくとき， $k$  次導関数

$$p^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

を求めよ．そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt = n! - e^{-x} \sum_{k=0}^n p^{(k)}(x)$$

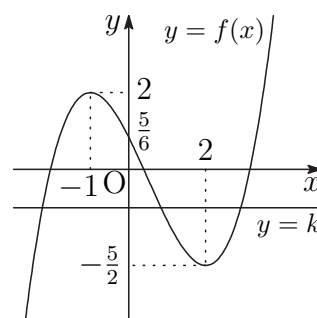
が成り立つことを示せ．ただし， $p^{(0)}(x) = p(x)$  と定める．

## 正解

□ (1)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{6}$  より

$$f'(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

$x$	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



よって 極大値  $f(-1) = 2$ , 極小値  $f(2) = -\frac{5}{2}$

また, 3 次方程式  $f(x) = k$  が, 異なる正の解を 2 個, 負の解を 1 個もつ  $k$  の値の範囲は,  $y = f(x)$  のグラフと直線  $y = k$  の共有点の  $x$  座標が  $x > 0$  の範囲に 2 個と  $x < 0$  の範囲に 1 個もつ範囲であるから

$$-\frac{5}{2} < k < \frac{5}{6}$$

(2)  $0 < \theta < \pi$  で  $\tan \theta = -2\sqrt{2} < 0$  であるから  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  ... ①

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ より } 1 + (-2\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{ゆえに } \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

① より,  $\cos \theta < 0$  であるから  $\cos \theta = -\frac{1}{3}$

これを  $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$  に代入すると  $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{3}$

① より,  $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$  であるから,  $\cos \frac{\theta}{2} > 0$  に注意して

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(3) S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots (*)$$

(\*) に  $n = 1$  を代入すると  $S_1 = 6 - 2a_1$

$S_1 = a_1$  であるから  $a_1 = 6 - 2a_1$  これを解いて  $a_1 = 2$

$n \geq 2$  のとき,  $a_n = S_n - S_{n-1}$  であるから, (\*) より

$$a_n = 6n - 2a_n - \{6(n-1) - 2a_{n-1}\}$$

整理すると  $3a_n = 2a_{n-1} + 6$  ゆえに  $a_n - 6 = \frac{2}{3}(a_{n-1} - 6)$

これから, 数列  $\{a_n - 6\}$  は初項  $-4$ , 公比  $\frac{2}{3}$  の等比数列であるから

$$a_n - 6 = -4 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = 6 - 4 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

上式は,  $n = 1$  のときも成立するから, 求める一般項は

$$a_n = 6 - 4 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$(4) A(5, 2), B(11, 10), P(x, y) \text{ から}$$

$$\overrightarrow{AP} = (x - 5, y - 2), \quad \overrightarrow{BP} = (x - 11, y - 10)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \text{ であるから } (x - 5)(x - 11) + (y - 2)(y - 10) = 0$$

$$\text{したがって } (x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 25 \quad \dots (*)$$

よって, 点  $P(x, y)$  の軌跡は 中心  $(8, 6)$ , 半径 5 の円

円 (\*) の中心を  $C$ ,  $\vec{r} = (4, 3)$  とおくと,  $\overrightarrow{OC} = 2\vec{r}$ ,  $|\vec{r}| = 5$  より,  $|\overrightarrow{OP}|$  は

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \vec{r} = 3\vec{r}, \quad \text{すなわち, } P(12, 9) \text{ のとき } \text{最大値 } 3|\vec{r}| = 15$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + (-\vec{r}) = \vec{r}, \text{ すなわち, } P(4, 3) \text{ のとき } \text{最小値 } |\vec{r}| = 5$$





**3** (1) **1** (3) を参照 .

(2)  $\theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$  とおくと ,  $A = \sin \theta$  であるから

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos 2\theta \\ &= 2 - 2(1 - 2 \sin^2 \theta) = 4 \sin^2 \theta = 4A^2 \end{aligned}$$

(3) 方程式から  $\log_2 x^2 = \log_2 4|x - 2|$

真数は正であるから  $x^2 = 4|x - 2| > 0$

(i)  $x > 2$  のとき  $x^2 = 4(x - 2)$  ゆえに  $(x - 2)^2 = -4$   
これを満たす実数  $x$  は存在しない .

(ii)  $x < 2$  のとき  $x^2 = 4(2 - x)$  ゆえに  $(x + 2)^2 = 12$   
 $x < 2$  に注意して  $x = -2 \pm 2\sqrt{3}$

(i),(ii) より  $x = -2 \pm 2\sqrt{3}$

(4)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$  より  $f(0) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} (x + 1) = 1 \end{aligned}$$

よって  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$

- 4 (1) 中心 C の座標  $(x, y)$  は  $x = at, y = a$

$$\overrightarrow{CQ} = a \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - t) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t + \sin t) \\ a(1 + \cos t) \end{pmatrix}$$

よって, 点 Q の座標  $(x, y)$  は  $x = a(t + \sin t), y = a(1 + \cos t)$

- (2) P の座標  $(x, y)$  は,  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  であるから

$$\overrightarrow{v_P} = (a(1 - \cos t), a \sin t)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 2\pi \text{ において } |\overrightarrow{v_P}| &= a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \\ &= a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| = 2a \sin \frac{t}{2} \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{v_P}|$  は  $t = \pi$ , すなわち,  $P(\pi a, 2a)$  のとき, 最大値  $2a$   
 $t = 0, 2\pi$ , すなわち,  $P(0, 0), P(2\pi a, 0)$  のとき, 最小値  $0$

- (3) (1) の結果から  $\overrightarrow{v_Q} = (a(1 + \cos t), -a \sin t)$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{v_P} \cdot \overrightarrow{v_Q} = a^2(1 - \cos t)(1 + \cos t) - a^2 \sin^2 t = 0$$

$$(4) L_P = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\overrightarrow{v_P}| dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2a \sin \frac{t}{2} dt = \left[ -4a \cos \frac{t}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 4\sqrt{2}a$$

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 2\pi \text{ において } |\overrightarrow{v_Q}| &= a\sqrt{(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t} \\ &= a\sqrt{2(1 + \cos t)} = 2a \left| \cos \frac{t}{2} \right| \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{v_Q}| = a\sqrt{(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t} = a\sqrt{2(1 + \cos t)} = 2a \left| \cos \frac{t}{2} \right| \text{ より}$$

$$\begin{aligned} L_Q &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\overrightarrow{v_Q}| dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2a \cos \frac{t}{2} dt - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 2a \cos \frac{t}{2} dt \\ &= \left[ 4a \sin \frac{t}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \left[ 4a \sin \frac{t}{2} \right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = 4(2 - \sqrt{2})a \end{aligned}$$

- 5 (1)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$  より  $f'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ ,  $f''(x) = 2x$

$x$	$\dots$	$-1$	$\dots$	$0$	$\dots$	$1$	$\dots$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって 極大値  $f(-1) = \frac{8}{3}$ , 極小値  $f(1) = \frac{4}{3}$ , 変曲点  $P(0, 2)$

- (2) (1) の結果から  $f'(0) = -1$  ゆえに  $\ell$  の傾きは  $-1$ ,  $m$  の傾きは  $1$

$\ell, m$  は点  $P(0, 2)$  を通るから  $\ell: y = -x + 2$ ,  $m: y = x + 2$

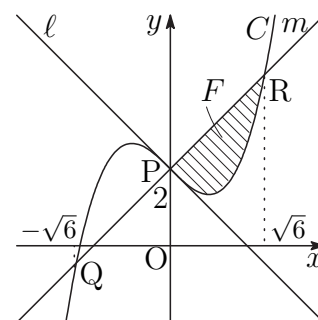
- (3)  $C: y = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$ ,  $m: y = x + 2$  の共有点の  $x$  座標は

$$\frac{1}{3}x^3 - x + 2 = x + 2 \quad \text{ゆえに} \quad x(x^2 - 6) = 0$$

これを解いて  $x = 0, \pm\sqrt{6}$

$F$  は右の図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{6}} \left\{ x + 2 - \left( \frac{1}{3}x^3 - x + 2 \right) \right\} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{6}} \left( 2x - \frac{1}{3}x^3 \right) dx = \left[ x^2 - \frac{1}{12}x^4 \right]_0^{\sqrt{6}} = 3 \end{aligned}$$



- (4) (3) の図から,  $F$  を二等分する直線の方程式を  $y = ax + 2$  ( $-1 < a < 1$ ) とおくと, この直線と  $C$  の共有点の  $x$  座標は

$$\frac{1}{3}x^3 - x + 2 = ax + 2 \quad \text{ゆえに} \quad x\{x^2 - 3(a+1)\} = 0$$

これを解いて  $x = 0, \pm\sqrt{3(a+1)}$

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^{\sqrt{3(a+1)}} \left\{ ax + 2 - \left( \frac{1}{3}x^3 - x + 2 \right) \right\} dx \\ \frac{3}{2} &= \int_0^{\sqrt{3(a+1)}} \left\{ (a+1)x - \frac{1}{3}x^3 \right\} dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}(a+1)x^2 - \frac{1}{12}x^4 \right]_0^{\sqrt{3(a+1)}} = \frac{3}{4}(a+1)^2 \end{aligned}$$

したがって,  $\frac{3}{4}(a+1)^2 = \frac{3}{2}$  を  $-1 < a < 1$  に注意して解くと  $a = \sqrt{2} - 1$

よって, 求める直線の方程式は  $y = (\sqrt{2} - 1)x + 2$

- 6 (1)  $\vec{a}, \vec{b}$  と同じ向きの単位ベクトルを, それぞれ  $\vec{e}, \vec{f}$  とおくと  $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{a}, \vec{f} = \frac{\vec{b}}{b}$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OC} = (OB \cos \theta) \vec{e} = (b \cos \theta) \frac{\vec{a}}{a} = \frac{b \cos \theta}{a} \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OD} = (OA \cos \theta) \vec{f} = (a \cos \theta) \frac{\vec{b}}{b} = \frac{a \cos \theta}{b} \vec{b}$$

$$(2) (1) \text{の結果から} \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{b} - \frac{b \cos \theta}{a} \vec{a}$$

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \vec{a} - \frac{a \cos \theta}{b} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \ell \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BQ} = m \overrightarrow{DA} \text{ および上の2式から}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \ell \overrightarrow{CB} \\ &= \vec{a} + \ell \left( \vec{b} - \frac{b \cos \theta}{a} \vec{a} \right) = \left( 1 - \frac{b \cos \theta}{a} \ell \right) \vec{a} + \ell \vec{b} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{OB} + m \overrightarrow{DA} \\ &= \vec{b} + m \left( \vec{a} - \frac{a \cos \theta}{b} \vec{b} \right) = m \vec{a} + \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{b} m \right) \vec{b} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\vec{a}, \vec{b}$  は1次独立であるから

$$1 - \frac{b \cos \theta}{a} \ell = m, \quad \ell = 1 - \frac{a \cos \theta}{b} m$$

$$\text{上の2式から } m \text{ を消去すると} \quad \ell = 1 - \frac{a \cos \theta}{b} \left( 1 - \frac{b \ell \cos \theta}{a} \right)$$

$$\text{したがって} \quad \ell(1 - \cos^2 \theta) = 1 - \frac{a \cos \theta}{b} \quad \text{すなわち} \quad \ell = \frac{b - a \cos \theta}{b \sin^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{これから} \quad m &= 1 - \frac{b \cos \theta}{a} \cdot \frac{b - a \cos \theta}{b \sin^2 \theta} \\ &= 1 - \frac{\cos \theta (b - a \cos \theta)}{a \sin^2 \theta} = \frac{a - b \cos \theta}{a \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

$$(3) \overrightarrow{OQ} = p \vec{a} + q \vec{b} \text{ は, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad p = m, q = \ell$$

$$\text{よって} \quad p = \frac{a - b \cos \theta}{a \sin^2 \theta}, \quad q = \frac{b - a \cos \theta}{b \sin^2 \theta}$$

$\angle OAQ = \angle OBQ = 90^\circ$  より,  $OQ$  は  $\triangle AOB$  の外接円の直径である.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OQ} \text{ より} \quad r = \frac{1}{2} p = \frac{a - b \cos \theta}{2a \sin^2 \theta}, \quad s = \frac{1}{2} q = \frac{b - a \cos \theta}{2b \sin^2 \theta}$$

$$\boxed{7} \quad (1) \quad F: t \left| z + \frac{1}{t} \right| = \frac{1}{t} |z - t| \quad \cdots (a)$$

(a) に  $z = t$  を代入すると,  $t > 0$  より

$$(\text{左辺}) = t \left| t + \frac{1}{t} \right| = t \left( t + \frac{1}{t} \right) > 0, \quad (\text{右辺}) = 0$$

(a) に  $z = -\frac{1}{t}$  を代入すると,  $t > 0$  より

$$(\text{左辺}) = 0, \quad (\text{右辺}) = \frac{1}{t} \left| -\frac{1}{t} - t \right| = t \left( \frac{1}{t} + t \right) > 0$$

よって,  $A(t)$ ,  $B\left(-\frac{1}{t}\right)$  は, 図形  $F$  の点ではない.

$$(2) \quad t = 1 \text{ のとき } F: |z + 1| = |z - 1|$$

$F$  の点  $z$  は 2 点  $(1)$ ,  $(-1)$  から等距離にあるから,  $F$  は虚軸にある直線.

$$(3) \quad (a) \text{ より, } t^2 \left| z + \frac{1}{t} \right|^2 = \frac{1}{t^2} |z - t|^2 \text{ であるから } (t \neq 1)$$

$$\begin{aligned} t^2 \left( z + \frac{1}{t} \right) \left( \bar{z} + \frac{1}{t} \right) &= \frac{1}{t^2} (z - t)(\bar{z} - t) \\ \left( t^2 - \frac{1}{t^2} \right) z \bar{z} + \left( t + \frac{1}{t} \right) (z + \bar{z}) &= 0 \\ z \bar{z} + \frac{t}{t^2 - 1} (z + \bar{z}) &= 0 \\ \left| z + \frac{t}{t^2 - 1} \right|^2 &= \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} \\ \left| z - \frac{t}{1 - t^2} \right| &= \frac{t}{|1 - t^2|} \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

したがって,  $F$  は中心が  $\frac{t}{1 - t^2}$  で, 半径  $\frac{t}{|1 - t^2|}$  の円である.

$$\text{よって, 条件から } z_1 = 0, z_2 = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$(4) \quad (3) \text{ の結果から } m = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{t}{1 - t^2} \quad (*) \text{ より } |z - m| = \frac{t}{|1 - t^2|}$$

よって,  $F$  は  $m$  を中心とする半径  $|m|$  の円である.

8 (1) 部分積分法により

$$\begin{aligned}
 F_2(x) &= \int_0^x \frac{t^2}{2!} e^{-t} dt = - \int_0^x \frac{t^2}{2!} (e^{-t})' dt \\
 &= - \left[ \frac{t^2}{2!} e^{-t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{t}{1!} e^{-t} dt = - \frac{x^2}{2!} e^{-x} + F_1(x), \\
 F_1(x) &= \int_0^x t e^{-t} dt = - \int_0^x t (e^{-t})' dt \\
 &= - \left[ t e^{-t} \right]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt = -x e^{-x} + F_0(x)
 \end{aligned}$$

$$(2) F_0(x) = \int_0^x e^{-t} dt = \left[ -e^{-t} \right]_0^x = 1 - e^{-x}$$

上式および (1) の 2 式の辺々を加えて整理すると

$$F_2(x) = 1 - e^x \left( \frac{x^2}{2!} + x + 1 \right)$$

(3) (1) と同様に, 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}
 F_n(x) &= \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt = - \int_0^x \frac{t^n}{n!} (e^{-t})' dt \\
 &= - \left[ \frac{t^n}{n!} e^{-t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} dt = - \frac{x^n}{n!} e^{-x} + F_{n-1}(x)
 \end{aligned}$$

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{x^k}{k!} e^{-x} \text{ であるから } (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \{F_k(x) - F_{k-1}(x)\} &= - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} \\
 F_n(x) - F_0(x) &= -e^{-x} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \quad \dots (*)
 \end{aligned}$$

$F_0(x) = 1 - e^{-x}$  を (\*) の辺々に加えると

$$F_n(x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$(4) \quad p(x) = x^n \text{ より } \quad p^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

$$(3) \text{ の結果から } \quad \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt = n! - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} x^k$$

$$\text{ここで } \quad \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{k=0}^n p^{(k)}(x)$$

$$\text{よって } \quad \int_0^x t^n e^{-t} dt = n! - e^{-x} \sum_{k=0}^n p^{(k)}(x)$$

解説 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{px+q} f(x) dx = \frac{e^{px+q}}{p} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots \right\} + C$$

$$\int e^{-x+q} f(x) dx = -e^{-x+q} \{ f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots \} + C$$

本題は，上の第2式を用いると

$$\int_0^x e^{-t} p(t) dt = - \sum_{k=0}^n \left[ e^{-t} p^{(k)}(t) \right]_0^x = \sum_{k=0}^n p^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^n e^{-x} p^{(k)}(x)$$

$$p(x) = x^n \text{ であるから } \quad p^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \\ n! & (k = n) \end{cases}$$

$$\text{よって } \quad \int_0^x t^n e^{-t} dt = n! - e^{-x} \sum_{k=0}^n p^{(k)}(x)$$

注意  $e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdots (a)$  は， $x \neq 0$  のとき， $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdots (b)$  と表記できるが， $x = 0$  のとき， $0^0$  の項が現れ不適切である（不定形）．そこで便宜的に  $0^0 = 1$  と定めておけば，(a) はすべての  $x$  について (b) と表記できる．大学数学では，このように「 $0^0 = 1$ 」と定めて計算する流儀ある．

(\*) より，正確には， $F_n(x) = 1 - e^{-x} - e^{-x} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$  であるが，この便宜的

な流儀にならい， $F_n(x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  と表記してもよい．