

平成 30 年度 九州大学 2 次試験後期日程 (数学問題)120 分
工学部 3 月 12 日 数学 I・II・III・A・B

1 次で定義でされる数列 $\{I_n\}$ を考える .

$$I_n = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^{2n-1} x \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ .

(1) 次の等式が成り立つことを証明せよ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 数列 $\{I_n\}$ が次の式を満たすことを証明せよ .

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(3) $\frac{d}{dx}(\cos x \sin^{n-1} x)$ を $\sin x$ と n を用いて表せ .

(4) 数列 $\{I_n\}$ が次の漸化式を満たすことを証明せよ .

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

(5) 数列 $\{I_n\}$ の一般項を求めよ .

- 2 実数 a, b と虚数単位 i を用いて複素数 z が $z = a + bi$ の形で表されるとき, a を z の実部といい $a = \operatorname{Re} z$ と書き表し, b を z の虚部といい $b = \operatorname{Im} z$ と書き表す. また z の絶対値を $|z|$ で表す. 以下の問いに答えよ.

- (1) 複素数 $u = \frac{5 + 5\sqrt{3}i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$ を極形式で表せ.
- (2) 条件 $\operatorname{Re} w \leq 0, \operatorname{Im} w \geq 0, 40 \leq |w| \leq 135$ を満たす複素数 w 全体のなす領域

$$D = \{w \mid \operatorname{Re} w \leq 0, \operatorname{Im} w \geq 0, 40 \leq |w| \leq 135\}$$

を考える. このとき, $z^3 u$ が D に属するような複素数 z 全体のなす領域

$$A = \{z \mid z^3 u \in D\}$$

を図示せよ.

- (3) 複素数 z が領域 A 上を動くとき, z と -2 との距離が最小になるような z を求めよ. 解答に極形式を用いてよい.

- 3 5人に「あなたの年齢は20代ですか」という質問をする. ただし, 各回答者は, 「はい」か「いいえ」と答える前にさいころを振り, 1または2の目が出たときは正直に答え, 3以上の目が出たときは, うその答えを言うものとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 5人のうち20代が1人もいないとき, 「はい」と答える人数が3である確率を求めよ.
- (2) 5人のうち20代がちょうど1人のとき, 「はい」と答える人数が3である確率を求めよ.
- (3) 5人の回答者は街頭調査で出会った人たちとする. ただし, 同じ人と繰り返し出会うこともあるとする. 街頭調査で出会う人が20代である確率が p のとき, 「はい」と答える人数が3である確率を求めよ.
- (4) (3)の確率が最大となる p を求めよ.

- 4 r を正の実数とする．半径がそれぞれ $r, 2r, 3r$ の 3 つの球 C_1, C_2, C_3 と，これらすべてに接する平面 α がある．ただし，3 つの球はすべて平面 α の同じ側で接しているものとする．すなわち，3 つの球のそれぞれの中心を結ぶ線分は，いずれも平面 α と交わらないものとする．3 つの球 C_1, C_2, C_3 と平面との接点をそれぞれ P_1, P_2, P_3 とする．空間において，基点 O を定め， $\overrightarrow{OP_1} = \vec{p}$ ， $\overrightarrow{OP_2} = \vec{p} + \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OP_3} = \vec{p} + \vec{b}$ とすると， $|\vec{a}| = 3r$ ， $|\vec{b}| = 4r$ であり， \vec{a} と \vec{b} のなす角は 60° である．以下の問いに答えよ．

- (1) 点 Q を平面 α 上にある点とする．球 C_2 の中心と点 Q との距離を d_1 ，球 C_3 の中心と点 Q との距離を d_2 とする．このとき， $d_1 + d_2$ を最小にする点 Q の位置ベクトル \overrightarrow{OQ} を， $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ を用いて表せ．
- (2) 3 つの球 C_1, C_2, C_3 の中心を通る平面 β と，平面 α との交線を l とする． l を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ と媒介変数 t を用いて媒介変数表示せよ．
- (3) 点 R を直線 l 上にある点とする．球 C_2 の中心と点 R との距離を最小にする点 R の位置ベクトル \overrightarrow{OR} を， $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ を用いて表せ．

- 5 2 つの関数 $f(x), g(x)$ をそれぞれ $f(x) = (a+1)x$ ， $g(x) = ax^2$ とする．ただし， a は正の実数とする．以下の問いに答えよ．

- (1) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形を座標平面上に図示せよ．
- (2) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 S を a の式で表せ．また，面積 S が最小となる a と，そのときの面積を求めよ．
- (3) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 S が最小になるとき，この図形を直線 $y = f(x)$ の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

解答例

□1 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ について, $x = \frac{\pi}{2} - t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = -1$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \cdot (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \end{aligned}$$

(2) $I_n = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^{2n-1} x \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ より

$$\begin{aligned} I_n &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\cos^{2n} x)' \, dx \\ &= - \left[\cos^{2n} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx \end{aligned}$$

上式および (1) の結果から $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(3) $\frac{d}{dx} (\cos x \sin^{n-1} x) = -\sin x \sin^{n-1} x + \cos x \{(n-1) \sin^{n-2} x \cos x\}$
 $= -\sin^n x + (n-1) \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)$
 $= -n \sin^n x + (n-1) \sin^{n-2} x$

(4) (3) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-n \sin^n x + (n-1) \sin^{n-2} x\} dx &= \left[\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx = 0 \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx &= \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx \quad \dots (*) \end{aligned}$$

(*) において, n を $2n$ に置き換えると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x \, dx$$

よって $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$

(5) (4) の結果から , n が 2 以上の自然数のとき

$$\prod_{k=2}^n \frac{I_k}{I_{k-1}} = \prod_{k=2}^n \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=2}^n \frac{2k(2k-1)}{(2k)^2}$$

$$\frac{I_n}{I_1} = 2 \prod_{k=1}^n \frac{2k(2k-1)}{2^2 k^2} = 2 \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{2n C_n}{2^{2n-1}}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \text{ より}$$

$$2I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{ゆえに} \quad I_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{したがって} \quad I_n = \frac{2n C_n}{2^{2n-1}} I_1 = \frac{2n C_n}{2^{2n-1}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{2n C_n}{2^{2n+1}} \pi$$

$$\text{上式は , } n = 1 \text{ のときも成立するから} \quad I_n = \frac{2n C_n}{2^{2n+1}} \pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{補足} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ とする .}$$

(*) において , n を $2n-1$ に置き換えると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx = \frac{2n-2}{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-3} x dx$$

$$\text{よって} \quad J_n = \frac{2n-2}{2n-1} J_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

n が 2 以上の自然数のとき

$$\prod_{k=2}^n \frac{J_k}{J_{k-1}} = \prod_{k=2}^n \frac{2k-2}{2k-1} = \prod_{k=2}^n \frac{(2k-2)^2}{(2k-1)(2k-2)}$$

$$\frac{J_n}{J_1} = \prod_{k=2}^n \frac{2^2(k-1)^2}{(2k-1)(2k-2)}$$

$$= \frac{2^{2n-2} \{(n-1)!\}^2}{(2n-1)!} = \frac{2^{2n-2}}{(2n-1) \cdot {}_{2n-2}C_{n-1}}$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \text{ より , 上式は } n = 1 \text{ のときも成立するから}$$

$$J_n = \frac{2^{2n-2}}{(2n-1) \cdot {}_{2n-2}C_{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad \frac{5 + 5\sqrt{3}i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i} = \frac{5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i} = \frac{5(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} = 5 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$(2) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ とおくと } (r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

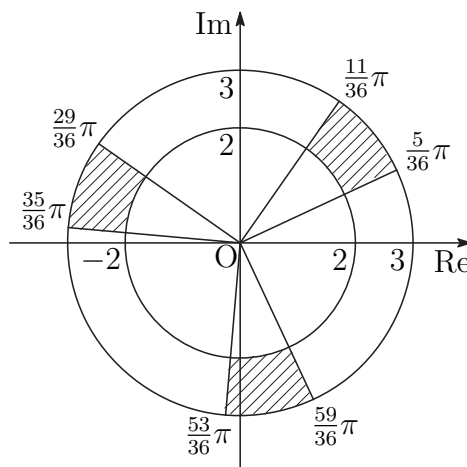
$$\begin{aligned} z^3 u &= \{r(\cos \theta + i \sin \theta)\}^3 \cdot 5 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \\ &= 5r^3 \left\{ \cos \left(3\theta + \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(3\theta + \frac{\pi}{12} \right) \right\} \end{aligned}$$

$z^3 u \in D$ であるから, n を整数とすると

$$40 \leq 5r^3 \leq 135, \quad \frac{\pi}{2} + 2n\pi \leq 3\theta + \frac{\pi}{12} \leq \pi + 2n\pi$$

$$\text{すなわち } 2 \leq r \leq 3, \quad \frac{24n+5}{36}\pi \leq \theta \leq \frac{24n+11}{36}\pi \quad (n = 0, 1, 2)$$

よって, 領域 $A = \{z \mid z^3 u \in D\}$ は下の図の斜線部分で, 境界線を含む.



$$(3) \quad (2) \text{ の図から } z = 2 \left(\cos \frac{35}{36}\pi + i \sin \frac{35}{36}\pi \right)$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \text{正直に答える確率は } \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \text{うその答えを言う確率は } \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

正直に答える者が2人でうその答えを言う者が3人であるから

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{80}{243}$$

(2) (i) 20代の1人が正直に答えるとき

他の4人について2人が正直に答え、2人がうその答えを言うから

$$\frac{1}{3} \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{243}$$

(ii) 20代の1人がうその答えを言うとき

他の4人について1人が正直に答え、3人がうその答えを言うから

$$\frac{2}{3} \times {}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{64}{243}$$

(i),(ii) より、求める確率は $\frac{24}{243} + \frac{64}{243} = \frac{88}{243}$

(3) 出会った1人が「はい」と答える確率は $p \times \frac{1}{3} + (1-p) \times \frac{2}{3} = \frac{2-p}{3}$

出会った1人が「いいえ」と答える確率は $p \times \frac{2}{3} + (1-p) \times \frac{1}{3} = \frac{1+p}{3}$

したがって、出会った5人のうち3人が「はい」と答える確率は

$${}_5C_3 \left(\frac{2-p}{3}\right)^3 \left(\frac{1+p}{3}\right)^2 = \frac{10}{243} (2-p)^3 (1+p)^2$$

(4) $f(p) = \frac{10}{243} (2-p)^3 (1+p)^2$ とおくと $f'(p) = \frac{10}{243} (2-p)^2 (1+p)(1-5p)$

$0 \leq p \leq 1$ における $f(p)$ の増減は次のようになる。

p	0	...	$\frac{1}{5}$...	1
$f'(p)$		+	0	-	
$f(p)$		↗	極大	↘	

(3) の確率が最大となる p は $p = \frac{1}{5}$

別解 3個の正数 $\frac{2-p}{3}$ と 2個の正数 $\frac{1+p}{2}$ の相加・相乗平均の大小関係により

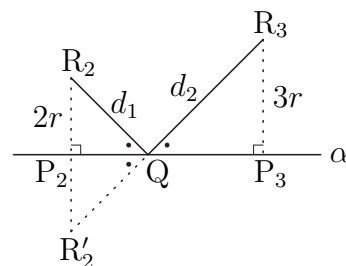
$$\frac{1}{5} \left\{ 3 \cdot \frac{2-p}{3} + 2 \cdot \frac{1+p}{2} \right\} \geq \sqrt[5]{\left(\frac{2-p}{3}\right)^3 \left(\frac{1+p}{2}\right)^2}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^5 \geq \frac{(2-p)^3 (1+p)^2}{3^3 \cdot 2^2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{10}{243} (2-p)^3 (1+p)^2 \leq \frac{216}{625}$$

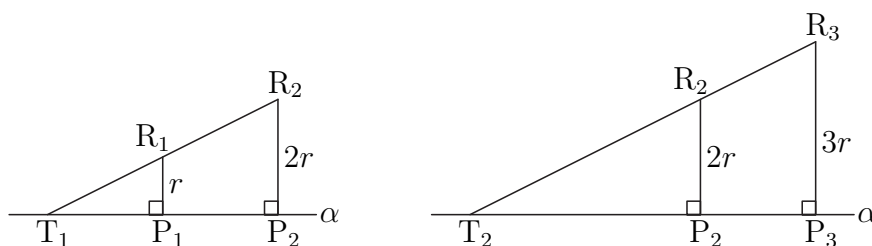
(3) の確率が最大になるとき $\frac{2-p}{3} = \frac{1+p}{2}$ これを解いて $p = \frac{1}{5}$

- 4 (1) C_i の中心を R_i とし ($i = 1, 2, 3$) , α に関して R_2 と対称な点を R'_2 とする . Q は線分 R'_2R_3 と α の交点であるから , Q は線分 P_2P_3 を $2 : 3$ に内分する点である .

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3(\vec{p} + \vec{a}) + 2(\vec{p} + \vec{b})}{2 + 3} = \vec{p} + \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$



- (2) 2 直線 R_1R_2 , R_2R_3 と α との交点をそれぞれ T_1 , T_2 とする .



T_1 は線分 P_1P_2 を $1 : 2$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{-2\vec{p} + (\vec{p} + \vec{a})}{1 - 2} = \vec{p} - \vec{a}$$

T_2 は線分 P_2P_3 を $2 : 3$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{OT_2} = \frac{-3(\vec{p} + \vec{a}) + 2(\vec{p} + \vec{b})}{2 - 3} = \vec{p} + 3\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{T_1T_2} = 4\vec{a} - 2\vec{b} = 2(2\vec{a} - \vec{b})$$

交線 l は直線 T_1T_2 , すなわち , T_1 を通り , $2\vec{a} - \vec{b}$ に平行な直線である .
よって , l の方程式は , 媒介変数 t を用いて

$$\overrightarrow{OT_1} + t(2\vec{a} - \vec{b}) = \vec{p} - \vec{a} + t(2\vec{a} - \vec{b}) = \vec{p} + (2t - 1)\vec{a} - t\vec{b}$$

- (3) $R_2R^2 = R_2P_2^2 + P_2R^2 = 4r^2 + P_2R^2$

R は P_2R が最小となる , すなわち , $\overrightarrow{P_2R} \perp (2\vec{a} - \vec{b})$ を満たす点である .

$$(3) \text{ の結果から } \overrightarrow{OR} = \vec{p} + (2t - 1)\vec{a} - t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{P_2R} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP_2} = 2(t - 1)\vec{a} - t\vec{b}$$

$$|\vec{a}| = 3r , |\vec{b}| = 4r , \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 60^\circ = 6r^2 , \overrightarrow{P_2R} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \text{ より}$$

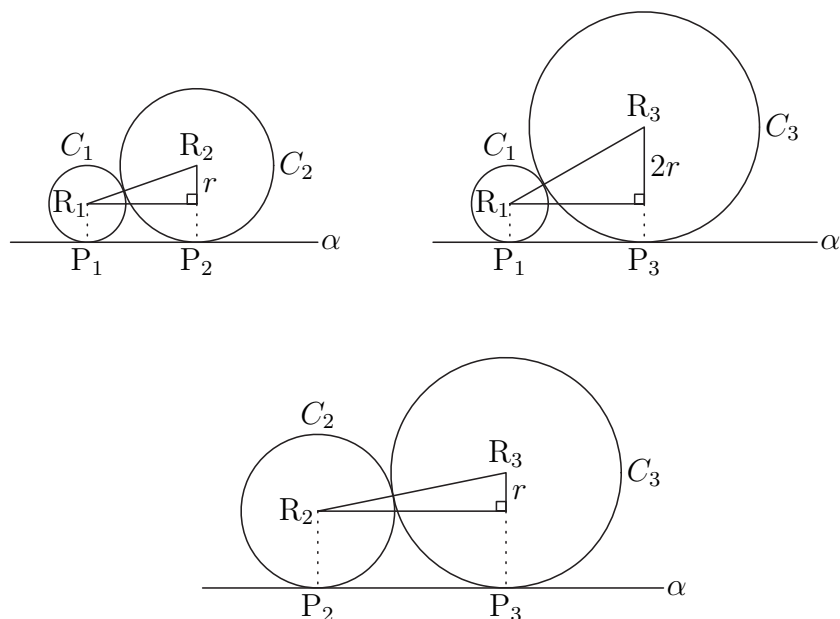
$$\{2(t - 1)\vec{a} - t\vec{b}\} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$4(t - 1)|\vec{a}|^2 - 2(2t - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$$

$$4\{9(t - 1) - 3(2t - 1) + 4t\}r^2 = 0$$

$$\text{ゆえに } t = \frac{6}{7} \quad (3) \text{ の結果に代入して } \overrightarrow{OR} = \vec{p} + \frac{5}{7}\vec{a} - \frac{6}{7}\vec{b}$$

参考 本題において, C_1, C_2, C_3 が互いに外接しているとき, $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \vec{a} \cdot \vec{b}$ を求める.



$$\overrightarrow{OP_1} = \vec{p}, \overrightarrow{OP_2} = \vec{p} + \vec{a}, \overrightarrow{OP_3} = \vec{p} + \vec{b} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{P_1P_3} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{P_2P_3} = \vec{b} - \vec{a}$$

$R_1R_2 = 3r, R_1R_3 = 4r, R_2R_3 = 5r$ であるから, 上の図から

$$|\vec{a}| = \sqrt{(3r)^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(4r)^2 - (2r)^2} = 2\sqrt{3}r,$$

$$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(5r)^2 - r^2} = 2\sqrt{6}r$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \text{ より}$$

$$24r^2 = 12r^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 8r^2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -2r^2$$

このとき, 本題の (1), (2) の答は変わらないが, (3) においては上の結果を

$$4(t-1)|\vec{a}|^2 - 2(2t-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$$

に代入すると

$$4\{8(t-1) + (2t-1) + 3t\}r^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{9}{13}$$

$$\text{このとき} \quad \overrightarrow{OR} = \vec{p} + \frac{5}{13}\vec{a} - \frac{9}{13}\vec{b}$$

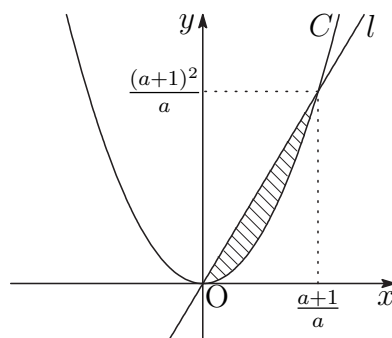
- 5 (1) $l: y = f(x)$, $C: y = g(x)$ とする .
 l と C の方程式から y を消去すると

$$(a+1)x = ax^2$$

ゆえに $ax \left(x - \frac{a+1}{a} \right) = 0$

交点は $(0, 0), \left(\frac{a+1}{a}, \frac{(a+1)^2}{a} \right)$

l と C で囲まれた図形は右の図の斜線部分 .



- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{a+1}{a}} \{ (a+1)x - ax^2 \} dx \\ &= a \int_0^{\frac{a+1}{a}} x \left(\frac{a+1}{a} - x \right) dx = \frac{a}{6} \left(\frac{a+1}{a} \right)^3 = \frac{(a+1)^3}{6a^2} \end{aligned}$$

$S = \frac{1}{6}a^{-2}(a+1)^3$ を a について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dS}{da} &= \frac{1}{6} \{ -2a^{-3}(a+1)^3 + 3a^{-2}(a+1)^2 \} \\ &= \frac{1}{6}a^{-3}(a+1)^2 \{ -2(a+1) + 3a \} = \frac{1}{6a^3}(a+1)^2(a-2) \end{aligned}$$

したがって, S の増減表は次のようになる .

a	(0)	...	2	...
$\frac{dS}{da}$		-	0	+
S		\searrow	$\frac{9}{8}$	\nearrow

よって, S は $a = 2$ のとき, 最小値 $\frac{9}{8}$ をとる .

(3) (2) の結果より $a = 2$ であるから , これを(1) に適用すると

$$l : y = 3x, \quad C : y = 2x^2$$

これらの交点の座標は $(0, 0), \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

l に平行な単位ベクトルと垂直な単位ベクトルを , それぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とし , この向きに X 軸 , Y 軸を定め , 次の直交変換を行う .

$$\frac{X}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{Y}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

すなわち $\frac{X + 3Y}{\sqrt{10}} = x, \quad \frac{3X - Y}{\sqrt{10}} = y$

ゆえに $X = \frac{x + 3y}{\sqrt{10}}, \quad Y = \frac{3x - y}{\sqrt{10}}$

$C : y = 2x^2 \left(0 \leq x \leq \frac{3}{2}\right)$ はこの直交変換により

$$X = \frac{x + 6x^2}{\sqrt{10}}, \quad Y = \frac{3x - 2x^2}{\sqrt{10}} \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow \frac{3}{2} \\ X & 0 \longrightarrow \frac{3\sqrt{10}}{2} \end{array}$$

求める回転体の体積 V は , $\frac{dX}{dx} = \frac{1 + 12x}{\sqrt{10}}$ により

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{3\sqrt{10}}{2}} Y^2 dX = \pi \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3x - 2x^2}{\sqrt{10}} \right)^2 \frac{1 + 12x}{\sqrt{10}} dx \\ &= \frac{2\pi}{5\sqrt{10}} \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 \left(\frac{3}{2} - x \right)^2 (1 + 12x) dx \\ &= \frac{2\pi}{5\sqrt{10}} \int_0^{\frac{3}{2}} \left\{ x^2 \left(\frac{3}{2} - x \right)^2 + 12x^3 \left(\frac{3}{2} - x \right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{2\pi}{5\sqrt{10}} \left\{ \frac{2!2!}{5!} \left(\frac{3}{2} \right)^5 + 12 \cdot \frac{3!2!}{6!} \left(\frac{3}{2} \right)^6 \right\} = \frac{81\pi}{80\sqrt{10}} \end{aligned}$$

補足 $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$ を利用¹ .

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf [1]

発展 $l: y = 3x$, $C: y = 2x^2$ で囲まれた図形を x 軸および y 軸の周りに 1 回転して
できる回転体の体積をそれぞれ V_x , V_y とすると

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{\frac{3}{2}} \{(3x)^2 - (2x^2)^2\} dx = \pi \left[3x^3 - \frac{4}{5}x^5 \right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{81}{20}\pi, \\ V_y &= 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} x(3x - 2x^2) dx = 4\pi \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 \left(\frac{3}{2} - x \right) dx \\ &= 4\pi \cdot \frac{2!1!}{4!} \left(\frac{3}{2} \right)^4 = \frac{27}{16}\pi \end{aligned}$$

パップス・ギュルダンの定理²により, 図形の重心 G は

$$\left(\frac{V_y}{2\pi S}, \frac{V_x}{2\pi S} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{5} \right)$$

$$G \text{ と } l: 3x - y = 0 \text{ の距離 } h \text{ は } h = \frac{|3 \cdot \frac{3}{4} - \frac{9}{5}|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{20\sqrt{10}}$$

$$\text{よって} \quad V = 2\pi h S = 2\pi \cdot \frac{9}{20\sqrt{10}} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81\pi}{80\sqrt{10}}$$

パップス・ギュルダンの定理は, 高校数学の範囲外である. 入試では使用できないが, 便利な検算法である.

²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf の 6 ページを参照.