第48回鹿児島県高等学校1年生数学学力診断テスト　　数学Ⅰ・A　略解と採点の手引き　No. 1

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
　　　　(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，1点を減じてください。

1　25点

(1)	$(x+3)(5x-2)$	(2)	$-x^3y^5$	(3)	12	(4)	$-3<x<5$
(5)	$-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$	(6)	$(4,2)$	(7)	$4,6,8$	(8)	$\dfrac{8}{25}$

2　25点

(1) $\sqrt{3}+1$　[5点]

(2) $a=2,\ b=\sqrt{3}-1$　[5点]

(3) $x=\sqrt{3}+1,\ b=\sqrt{3}-1$ より

$$\frac{b}{x}+\frac{x}{b}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$ 2

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}}{2}$$

$$=4$$

[7点]

(4)
$$\frac{b^6+ab^5x+abx^5+x^6}{b^3x^3}=\frac{b^3}{x^3}+a\cdot\frac{b^2}{x^2}+a\cdot\frac{x^2}{b^2}+\frac{x^3}{b^3}$$

$$=\left(\frac{b^3}{x^3}+\frac{x^3}{b^3}\right)+a\left(\frac{b^2}{x^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)\quad\cdots Ⓐ$$ 3

$\dfrac{b}{x}+\dfrac{x}{b}=4$ より．
$$\frac{b^3}{x^3}+\frac{x^3}{b^3}=\left(\frac{b}{x}+\frac{x}{b}\right)^3-3\cdot\frac{b}{x}\cdot\frac{x}{b}\left(\frac{b}{x}+\frac{x}{b}\right)$$
$$=4^3-3\cdot1\cdot4=52$$
$$\frac{b^2}{x^2}+\frac{x^2}{b^2}=\left(\frac{b}{x}+\frac{x}{b}\right)^2-2\cdot\frac{b}{x}\cdot\frac{x}{b}$$
$$=4^2-2\cdot1=14$$

よってⒶより．

$(与式)=52+2\cdot14=80$

[8点]

3　25点

(1) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$　[5点]

(2) $a=3,\ -1$　[5点]

(3) 判別式 $D=\{-(2a-3)\}^2-4\cdot1\cdot(a^2-7)$
$$=4a^2-12a+9-4a^2+28$$
$$=-12a+37$$ 2

$-12a+37>0$ つまり $a<\dfrac{37}{12}$ のとき，実数解2個

$-12a+37=0$ つまり $a=\dfrac{37}{12}$ のとき，実数解1個

$-12a+37<0$ つまり $a>\dfrac{37}{12}$ のとき，実数解0個

[7点]

(4) 2解を $k,\ k+1$ とする

$k,\ k+1$ を解にもち，x^2 の係数が1である2次方程式は，

$(x-k)\{x-(k+1)\}=0$

$\therefore\ x^2-(2k+1)x+k(k+1)=0$ 3

①と係数比較すると．$2a-3=2k+1$ ㋐，$a^2-7=k(k+1)$ ㋑

㋐より $k=a-2$

㋑に代入すると．$a^2-7=(a-2)(a-1)$

$a^2-7=a^2-3a+2$

$\therefore\ a=3$

これは．$a<\dfrac{37}{12}$ をみたす．よって $a=3$

[8点]

4　25点

(1) $(2,0)$　[5点]

(2) $0\leqq y<16$　[5点]

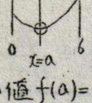
(3) $f(x)=x^2-2ax+a+2\quad(a\geqq0)$
$$=(x-a)^2-a^2+a+2$$

軸は．直線 $x=a$

定義域は．$0\leqq x\leqq6$ なので．

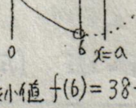
最小値は．

(i) $0\leqq a\leqq6$ のとき．



最小値 $f(a)=-a^2+a+2$

(ii) $6<a$ のとき．



最小値 $f(6)=38-11a$

よって 最小値は．
$$\begin{cases}-a^2+a+2 & (0\leqq a\leqq6)\\ 38-11a & (6<a)\end{cases}$$

(i),(ii) 一方のみは．3

[7点]

(4) $0\leqq x\leqq6$ における $f(x)$ の最小値が0より大きくなればよい 2

(i) $0\leqq a\leqq6$ のとき，

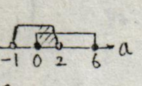
$-a^2+a+2>0$

$a^2-a-2<0$

$(a+1)(a-2)<0$

$\therefore\ -1<a<2$

$0\leqq a\leqq6$ より



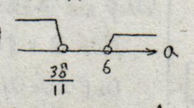
$0\leqq a<2$　+2

(ii) $6<a$ のとき．

$38-11a>0$

$\therefore\ a<\dfrac{38}{11}$

$6<a$ より



解なし　+2

(i)(ii)より $0\leqq a<2$

[8点]

鹿児島県数学教育会高校部会

第４８回鹿児島県高等学校１年生数学学力診断テスト	数学Ⅰ・Ａ	略解と採点の手引き	No. ２

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。

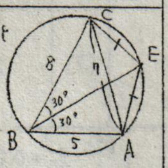
(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

5　25点

(1) 60° [5点]

(2) $10\sqrt{3}$ [5点]

(3) $\triangle ABC$, $\triangle ABE$ の外接円の半径を R とすると



$\triangle ABC$ において正弦定理より $\dfrac{7}{\sin 60^\circ} = 2R$

$\triangle ABE$ において同様に $\dfrac{AE}{\sin 30^\circ} = 2R$

よって $\dfrac{7}{\sin 60^\circ} = \dfrac{AE}{\sin 30^\circ}$ ↑ △4

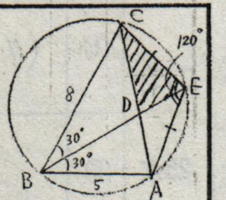
$AE \sin 60^\circ = 7 \sin 30^\circ$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} AE = \dfrac{7}{2}$

$AE = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

[7点]

(4) (3)より $AE = CE = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$



$\therefore \triangle AEC = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{7\sqrt{3}}{3} \sin 120^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{49}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{49\sqrt{3}}{12}$ ↑ +△2

線分BDは $\angle ABC$ の二等分線なので，

$AD : DC = BA : BC = 5 : 8$ ↑ +△2

よって $\triangle CDE = \dfrac{8}{13} \triangle AEC = \dfrac{\cancel{8}^{\,2}}{13} \cdot \dfrac{49\sqrt{3}}{\cancel{12}_{\,3}} = \dfrac{98\sqrt{3}}{39}$

[8点]

6　25点

(1) S_4 [5点]

(2) S_1 [5点]

(3)（証明）$n \notin S_0$ より，$n = 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$

（k は，0以上の整数） ↑ △2

$(5k+1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5(5k^2 + 2k) + 1 \in S_1$

$(5k+2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5(5k^2 + 4k) + 4 \in S_4$

$(5k+3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 5(5k^2 + 6k + 1) + 4 \in S_4$

$(5k+4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 1 \in S_1$

よって $n \notin S_0$ のとき，$n^2 \in (S_1 \cup S_4)$ である ▨ [7点]

(4)（証明）$a^2 + b^2 + c^2 \in S_0$ のとき，a, b, c がともに，S_0 の要素でないと仮定すると． ↑ △2

(3)より，a^2, b^2, c^2 は，ともに，$S_1 \cup S_4$ の要素である．

(i) a^2, b^2, c^2 が3つとも S_1 の要素のとき，$a^2 + b^2 + c^2 \in S_3$

(ii) a^2, b^2, c^2 のうち2つが S_1，1つが S_4 の要素のとき，$a^2 + b^2 + c^2 \in S_1$

(iii) a^2, b^2, c^2 のうち1つが S_1，2つが S_4 の要素のとき，$a^2 + b^2 + c^2 \in S_4$

(iv) a^2, b^2, c^2 が3つとも S_4 の要素のとき，$a^2 + b^2 + c^2 \in S_2$

(i)～(iv)より $a^2 + b^2 + c^2 \notin S_0$ より矛盾．

よって，$a^2 + b^2 + c^2 \in S_0$ のとき，a, b, c のうち少なくとも1つは S_0 の要素である． ▨

[8点]

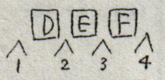
7　25点

(1) 720 [5点]

(2) 144 [5点]

(3) $\boxed{D}, \boxed{E}, \boxed{F}$ の並べ方は，$3!$ 通り．

$\boxed{A}, \boxed{B}, \boxed{C}$ は，右の1～4から3カ所を選んで並べるので



${}_4P_3$ 通り ↑ △3

よって．$3! \times {}_4P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 4 \cdot 3 \cdot 2$

$= 144$（通り）

[7点]

(4) $\boxed{A}, \boxed{B}, \boxed{C}$ がこの順に並んでいる順列の総数は，

$\dfrac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$（通り） ↑ +△2

このうち，$\boxed{D}, \boxed{E}, \boxed{F}$ がこの順に並んでいる順列の総数は，

$\dfrac{6!}{3!\,3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$（通り） ↑ +△2

よって $120 - 20 = 100$（通り）

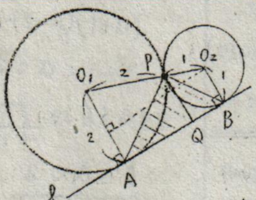
[8点]

8　25点

(1) 3 [5点]

(2) $2\sqrt{2}$ [5点]

(3) Pから直線 l に下ろした垂線の足をQとすると．



$O_2P : O_2O_1 = 1 : 3$ より．

$(PQ - 1) : (O_1A - 1) = 1 : 3$

$3(PQ - 1) = O_1A - 1 = 1$

$PQ - 1 = \dfrac{1}{3}$

$\therefore PQ = \dfrac{4}{3}$ ↑ △3

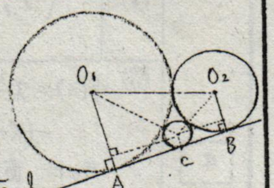
よって．$\triangle PAB = \dfrac{1}{2} AB \cdot PQ = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{4}{3}$

$= \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

[7点]

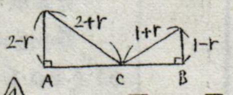
(4) 円 O_3 の中心から直線 l に下ろした垂線の足をCとする．

円 O_3 の半径を r とすると．$(r > 0)$



$(2+r)^2 = (2-r)^2 + AC^2$ より

$AC^2 = 8r$ $\therefore AC > 0$ より $AC = 2\sqrt{2}\sqrt{r}$



$(1+r)^2 = (1-r)^2 + BC^2$ より

$BC^2 = 4r$ $\therefore BC > 0$ より $BC = 2\sqrt{r}$ ↑ △4

$AC + BC = 2\sqrt{2}$ より

$2\sqrt{2}\sqrt{r} + 2\sqrt{r} = 2\sqrt{2}$ $\therefore (\sqrt{2}+1)\sqrt{r} = \sqrt{2}$ $\therefore \sqrt{r} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

$\sqrt{r} = 2 - \sqrt{2}$

$\therefore r = 6 - 4\sqrt{2}$

[8点]