第４９回鹿児島県高等学校２年生数学学力診断テスト

数学ⅡＡＢ	略解と採点の手引き	No. 1

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

Ⅱ1　25点

(1) 0 [5点]　(2) $(x-2)(x^2-2x+a)$ [5点]

(3) (i) $x^2-2x+a=0$ が $x=2$ を解にもつとき
$4-4+a=0$ より $a=0$ △1
このとき $(x-2)(x^2-2x)=0$
$x(x-2)^2=0$ となり 題意を満たす △3

(ii) $x^2-2x+a=0$ が重解をもつとき
$D/4=1-a=0$ より $a=1$ △1
このとき $(x-2)(x-1)^2=0$ となり 題意を満たす。△4

よって $a=0, 1$ [7点]

(4) $(x-2)(x^2-2x+a)=0$ より
$g(x)=x^2-2x+a=0$ が $x=2$ 以外の異なる正の解をもてばよい
$g(x)$ のグラフの軸は $x=1>0$ だから △1
$g(0)>0$ かつ $g(1)<0$ かつ $g(2)\neq 0$
$g(0)=a>0$ △1
$g(1)=a-1<0$ △1
$g(2)=a\neq 0$ △1 より △4
$0<a<1$

※ 3つできて4点。2つできて2点。1つできて1点。

[8点]

Ⅱ2　25点

(1) $x^2+y^2=4$ [5点]　(2) $3x+4y-12=0$ [5点]

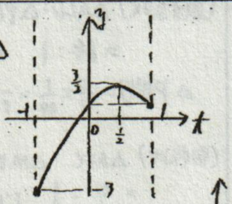
(3) ABに垂直な直線の方程式は
$y=\frac{4}{3}x+k$ △2
とおける。これと円Cとの交点を求めると
$x^2+\left(\frac{4}{3}x+k\right)^2=4$
$\frac{25}{9}x^2+\frac{8}{3}kx+k^2-4=0$
$D=\frac{16}{9}k^2-\frac{25}{9}(k^2-4)=0$ △4
$-k^2+\frac{100}{9}=0$
$\therefore k=\pm\frac{10}{3}$
$\therefore y=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3},\ y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$
[7点]

(4) ABに垂直で原点を通る直線は
$y=\frac{4}{3}x$ である。これと円Cとの
交点を求めると
$x^2+\frac{16}{9}x^2=4$
$\frac{25}{9}x^2=4$
$x^2=\frac{36}{25}$
$\therefore x=\pm\frac{6}{5}$
$P_1\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right), P_2\left(-\frac{6}{5},-\frac{8}{5}\right)$ △4
$\triangle ABP_1$ が最小
$\triangle ABP_2$ が最大
となる。
$h=\frac{2}{\sqrt{9+16}}=\frac{2}{5}$ より
$\triangle ABP_1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{2}{5}=1$
$\triangle ABP_2=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{22}{5}=11$
[8点]

Ⅱ3　25点

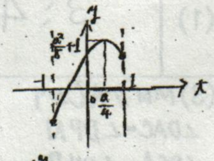
(1) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ [5点]　(2) $y=-2t^2+at+1$ [5点]

(3) $0\leqq x<2\pi$ より $-1\leqq t\leqq 1$ △2
$y=-2t^2+2t+1$
$=-2(t^2-t)+1$
$=-2\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+1$
$=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$ △4

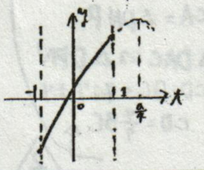


グラフより $t=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$ をとる △5
$\sin x=\frac{1}{2}$ より $x=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ 各1点
[7点]

(4) $y=-2t^2+at+1$
$=-2\left(t-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}+1\ (-1\leqq t\leqq 1)$
(i) $0<\frac{a}{4}\leqq 1$ のとき，つまり $0<a\leqq 4$ のとき
$t=\frac{a}{4}$ で最大となる
最大値 $\frac{a^2}{8}+1=2$ とすると
$a^2=8\quad\therefore a=\pm 2\sqrt{2}$ △3
$0<a\leqq 4$ より $a=2\sqrt{2}$ △4



(ii) $\frac{a}{4}>1$ のとき，つまり $a>4$ のとき
$t=1$ で最大となる
最大値 $-1+a=2$ とすると
$a=3$ △3 これは不適 △4
(i), (ii) より $a=2\sqrt{2}$



[8点]

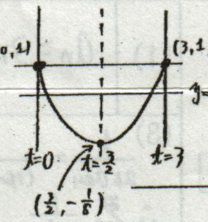
Ⅱ4　25点

(1) 1 [5点]　(2) $0\leqq t\leqq 3$ [5点]

(3) $f(x)=(\log_2 x-\log_2 4)(\log_4 x-\log_4 2)$ △2
$=(\log_2 x-2)\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}-\frac{\log_2 2}{\log_2 4}\right)$ △4
$=(t-2)\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)$ △6
$=\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+1$
$\left(=\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\right)$
[7点]

(4)

$f(x)=k$ は (3) より次のようになる
$\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}=k$
よって
$\begin{cases} y=\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8} \\ y=k \end{cases}$ の共有点の t 座標が
$0\leqq t\leqq 3$ に２個存在すればよい △4

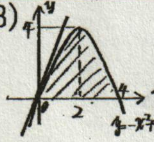


△6
図より
$-\frac{1}{8}<k\leqq 1$
[8点]

Ⅱ5　25点

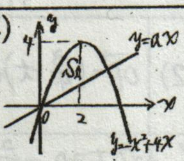
(1) $0, 4$ [5点]　(2) $\frac{32}{3}$ [5点]

(3)



図より，直線 $y=ax$ と斜線部分が共有点をもつのは
$a>0$ …① のときである。△2
また，Cと直線 $y=ax$ が接するのは
$-x^2+4x=ax$
$-x^2+(4-a)x=0$
$x^2+(a-4)x=0$ △3
判別式をDとするとD=0であればよい △4
$D=(a-4)^2$
$\therefore (a-4)^2=0$
$a=4$ △5
斜線部の境界線は含まないので
$a<4$ …②
①，②より △6
$0<a<4$
[7点]

(4)



Cと x 軸で囲まれた部分を
直線 $y=ax$ が２等分するとき
Cと直線で囲まれた部分の
面積を S_1 とすると
$S_1=\frac{1}{2}S$ であればよい △1
$S_1=\int_0^{4-a}(-x^2+4x-ax)\,dx$ △3
$=\left[-\frac{1}{3}x^3+(4-a)\frac{1}{2}x^2\right]_0^{4-a}$
$=-\frac{1}{3}(4-a)^3+(4-a)\frac{1}{2}(4-a)^2$
$=\frac{1}{6}(4-a)^3$ △5
ここで，(2)より
$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\times\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$ より
$\frac{1}{6}(4-a)^3=\frac{16}{3}$ △6
$(4-a)^3=32$
(7)より $4-a>0$ なので
$4-a=\sqrt[3]{32}$
$=2\sqrt[3]{4}$
$\therefore a=4-2\sqrt[3]{4}$
[8点]

鹿児島県数学教育会高校部会

第４９回鹿児島県高等学校２年生数学学力診断テスト

数学ⅡＡＢ	略解と採点の手引き	No. 2

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
　　　　(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

A 1　25点

(1) $\{0,1,2,3,4\}$ [5点]

(2) $\{2,3,4\}$ [5点]

(3) $\overline{B}=\{x \mid 2x^2+x-6<0\}$ より △2

$\overline{B}=\{-1,0,1\}$ △5

$\therefore A\cap\overline{B}=\{0,1\}$

[7点]

(4) $x^2-(2a+1)x+a^2+a<0$ より

$(x-a)(x-a-1)<0$

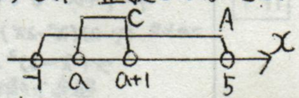
$\therefore a<x<a+1$ △2

i) a が整数のとき

$C=\phi$

これより．$C\subset A$ △2

ii) a が整数ではないとき．



$-1<a<0,\ 0<a<1,\ 1<a<2,$
$2<a<3,\ 3<a<4$ △2

i), ii) より

$-1\leqq a\leqq 4$ またはそれ以外の整数

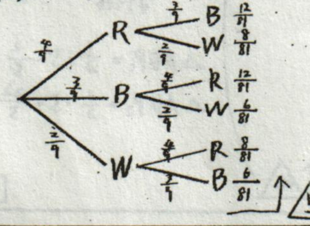
[8点]

A 2　25点

(1) $\dfrac{8}{81}$ [5点]

(2) $\dfrac{8}{27}$ [5点]

(3) R(赤)，B(青)，W(白)で表すと



△5

$\therefore \dfrac{12+8+12+6+8+6}{81}$

$=\dfrac{52}{81}$

[7点]

(4)

回数	0	1	2	計
確率	$\frac{49}{81}$	$\frac{28}{81}$	$\frac{4}{81}$	1

※各2点

(0コ) R→B，R→R
B→R，B→B

$\therefore 2\left(\frac{4}{9}\times\frac{3}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{3}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$ △2

(1コ) W→R，W→B
R→W，B→W

$2\left(\frac{2}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{3}{9}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{28}{81}$ △2

(2コ) W→W

$\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{4}{81}$ △2

$\therefore \dfrac{0\times49+1\times28+2\times4}{81}$

$=\dfrac{36}{81}=\dfrac{4}{9}$

[8点]

A 3　25点

(1) $3:4$ [5点]

(2) 4倍 [5点]

(3) $MN \parallel AC$ より

$\angle DAC=\angle DPN$

$\angle DCA=\angle DNP$

$\therefore \triangle DAC \sim \triangle DPN$

また，$CD:BC=4:7$ より

$CD=\frac{4}{7}BC$ △2

$\therefore DN=CD-CN$

$=\frac{4}{7}BC-\frac{1}{2}BC$

$=\frac{1}{14}BC$ △4

$\therefore AP:PD=CN:DN$

$=\frac{1}{2}:\frac{1}{14}$

$=7:1$

[7点]

(4) △ABCの面積を1とすると

$\triangle ACD=\frac{4}{7}$

(面積比) $\triangle ACD:\triangle PND$

$=64:1$ より

$\triangle PND=\frac{4}{7}\times\frac{1}{64}=\frac{1}{112}$ △4

(面積比) $\triangle ABC:\triangle MBN$

$=4:1$ より

$\triangle MBN=\frac{1}{4}$ △5

$\therefore$ 四角形BDPM

$=\triangle MBN-\triangle PDN$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{112}$

$=\frac{28-1}{112}$

$=\frac{27}{112}$

[8点]

B 1　25点

(1) $a_n=3n-103$ [5点]

(2) 34 [5点]

(3) $\dfrac{1}{a_k a_{k+1}}=\dfrac{1}{(3k-103)(3k-100)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3k-103}-\dfrac{1}{3k-100}\right)$ △2

$\therefore \displaystyle\sum_{k=35}^{50}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{47}-\frac{1}{50}\right)\right\}$ △4

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{50}\right)$ △6 $=\dfrac{4}{25}$

[7点]

(4) $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(3n-203)}{2}$

$|S_n|=\left|\dfrac{n(3n-203)}{2}\right|\geqq 0$ △2

$|S_n|=0$ とすると $n=0,\ 67.66\cdots$

n は自然数だから $n=1,67,68$ のいずれかで最小になる △4

$|S_1|=|a_1|=100$

$|S_{67}|=\left|\dfrac{67\times(-2)}{2}\right|=67$

$|S_{68}|=\left|\dfrac{68\times1}{2}\right|=34$ △6

最小値34 ($n=68$)

[8点]

B 2　25点

(1) -3 [5点]

(2) $\overrightarrow{OP}=\left(\frac{3}{4}+t\right)\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$ [5点]

(3) $CP\perp OP$ より $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OP}=0$ △2

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OP}=t\vec{a}\cdot\left\{\left(\frac{3}{4}+t\right)\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right\}$

$=\left(\frac{3}{4}t+t^2\right)|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}t\,\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=\left(\frac{3}{4}t+t^2\right)\cdot9+\frac{1}{4}t(-3)$

$=9t^2+6t$

$=3t(3t+2)=0$ △2

よって $t=0,\ -\frac{2}{3}$

ここで．$t=0$ のとき．$\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

となり不適であるから

$t=-\frac{2}{3}$

これより $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{12}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

[7点]

(4) $|\overrightarrow{OP}|^2=\left|\frac{1}{12}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right|^2=\frac{1}{144}|\vec{a}|^2+\frac{1}{24}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{16}|\vec{b}|^2$

$=\frac{9}{144}-\frac{3}{24}+\frac{4}{16}=\frac{1-2+4}{16}=\frac{3}{16}$

$|\overrightarrow{OP}|\geqq0$ だから $|\overrightarrow{OP}|=\frac{\sqrt{3}}{4}$ △3

$|\overrightarrow{CP}|=\left|-\frac{2}{3}\vec{a}\right|=\frac{2}{3}|\vec{a}|=2$ △2

よって　△OCPの面積は

$\frac{1}{2}\times CP\times OP=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

[8点]

鹿児島県数学教育会高校部会