第４８回鹿児島県高等学校２年生数学学力診断テスト

数学ⅡＡＢ	略解と採点の手引き	No. 1

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

Ⅱ１　25点

(1) $\alpha+\beta=1$ [5点]

(2) $\alpha^2+\beta^2=-1$ [5点]

(3) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=1$

・$\left(\alpha^2+\frac{2}{\beta}\right)+\left(\beta^2+\frac{2}{\alpha}\right)=\alpha^2+\beta^2+\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=\alpha^2+\beta^2+\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=-1+2=1$

・$\left(\alpha^2+\frac{2}{\beta}\right)\left(\beta^2+\frac{2}{\alpha}\right)=(\alpha\beta)^2+2(\alpha+\beta)+\frac{4}{\alpha\beta}=1+2+4=7$ △5

従って 求める2次方程式は $x^2-x+7=0$

答) $x^2-x+7=0$ [7点]

(4)

・$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\times1\times1=-2$ △3

・α,β は $x^2-x+1=0$ の解より

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^3+1=0$ ―①

α,β は①の解より

$\alpha^3+1=0$

$\alpha^3=-1$

同様に $\beta^3=-1$

$\alpha^{10}+\beta^{10}=(\alpha^3)^3\cdot\alpha+(\beta^3)^3\cdot\beta$

$=-\alpha-\beta$

$=-(\alpha+\beta)=-1$

答) $\alpha^3+\beta^3=-2$　$\alpha^{10}+\beta^{10}=-1$

[8点]

Ⅱ２　25点

(1) $y=-x+6$ [5点]

(2) $x+2\sqrt{2}y+9=0$ [5点]

(3) 重心Gと点Pの座標を $G(x,y)$, $P(a,b)$ とすると

点Pは円C上の点より $a^2+b^2=9$ ―①

重心の公式より $x=\frac{a+9}{3}$, $y=\frac{b+3}{3}$ △2

これを変形して $a=3x-9$, $b=3y-3$

①に代入して

$(3x-9)^2+(3y-3)^2=9$

$9(x-3)^2+9(y-1)^2=9$

$(x-3)^2+(y-1)^2=1$ △6

答) 円 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ [7点]

(4) $AB=\sqrt{(3-6)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$ で一定であるから，直線ABと点Qの距離が最も長くなるとき△ABQの面積は最大となる。△2

よって求める点Qは直線ABに垂直で(3,1)を通る直線 $y=x-2$ と(3)の円との交点のうち遠い方である。

従って

$(x-3)^2+(x-3)^2=1$

$2(x-3)^2=1$

$(x-3)^2=\frac{1}{2}$

$x-3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=3\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

遠いのは $x=3-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{6-\sqrt{2}}{2}$ △6

このとき $y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

答) $Q\left(\frac{6-\sqrt{2}}{2},\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

[8点]

Ⅱ３　25点

(1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}-1$ [5点]

(2) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)$ [5点]

(3) $t=\sin\theta-\cos\theta$ の両辺を2乗して

$t^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$2\sin\theta\cos\theta=1-t^2$

よって $\sin2\theta=1-t^2$

ゆえに

$y=-t^2+2t+1$ △5

一方，$0\leqq\theta<2\pi$ より

$\frac{7}{4}\pi\leqq\theta+\frac{7}{4}\pi<\frac{15}{4}\pi$

$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)\leqq1$

$-\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)\leqq\sqrt{2}$

答) $y=-t^2+2t+1$, $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ [7点]

(4) (3)より

$-t^2+2t+1=-2$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$t=-1,\ 3$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ より

$t=-1$ △2

$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)=-1$

$\sin\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{7}{4}\pi\leqq\theta+\frac{7}{4}\pi<\frac{15}{4}\pi$ より

$\theta+\frac{7}{4}\pi=\frac{7}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi$

$\theta=0,\ \frac{3}{2}\pi$　一方のみ △5

答) $\theta=0,\ \frac{3}{2}\pi$

[8点]

Ⅱ４　25点

(1) $-\frac{3}{4}$ [5点]

(2) 2 [5点]

(3) $f(x)=(2^x)^2+(2^{-x})^2-2(2^x+2^{-x})$ △2

$=(2^x+2^{-x})^2-2(2^x+2^{-x})-2$ △5

$=t^2-2t-2$

答) $f(x)=t^2-2t-2$

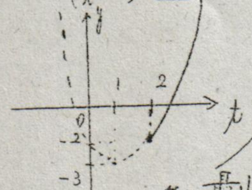
[7点]

(4) (2)より $t\geqq2$

(3)より

$f(x)=t^2-2t-2$

$=(t-1)^2-3$ △3



グラフより $t=2$ のとき最小値 -2 △5

つまり $2^x+2^{-x}=2$ で

等号が成立するのは

$2^x=2^{-x}$ のときで $x=0$ △8

答) 最小値 -2 ($x=0$ のとき)

[8点]

Ⅱ５　25点

(1) $y'=-2x$ [5点]

(2) $y=-2x+5$ [5点]

(3)・放物線 C_2 は点(1,3)を通るから

$3=a(1-b)^2$ ―①

・点Aにおける接線の傾きが -2 より

$y=ax^2-2abx+ab^2$

$y'=2ax-2ab$

$x=1$ を代入して

$2a-2ab=-2$

$a(1-b)=-1$ ―②

①に代入して

$3=-(1-b)$

$b=4$

①より $a=\frac{1}{3}$

$a>0$ を満たす.

①,②を両方導けて4点

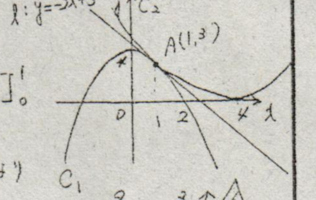
答) $a=\frac{1}{3}$, $b=4$ [7点]

(4)

$S_1=\int_0^1\{(-2x+5)-(-x^2+4)\}dx$

$=\int_0^1(x^2-2x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-1+1=\frac{1}{3}$ △3



一方，接線 l と x 軸との交点は $\left(\frac{5}{2},0\right)$ より

$S_2=\int_1^4\frac{1}{3}(x-4)^2dx-\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-1\right)\times3$

$=\int_1^4\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{3}\right)-\frac{9}{4}$

$=\left[\frac{1}{9}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{3}x\right]_1^4-\frac{9}{4}$

$=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$ △6

よって $S_1:S_2=\frac{1}{3}:\frac{3}{4}=4:9$

答) $4:9$ [8点]

鹿児島県数学教育会高校部会

第４８回鹿児島県高等学校２年生数学学力診断テスト

数学ⅡＡＢ	略解と採点の手引き	No. ２

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
　　　　(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

A1　25点

(1) 100（個）[5点]

(2) 2（個）[5点]

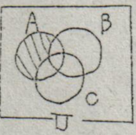
(3) 300以下の自然数で，3，5，7で割り切れる数の集合をそれぞれ，A，B，Cとする。また U を300以下の自然数とする。

$n(A)=100$，$n(A\cap B)=20$，$n(C\cap A)=14$

$n(A\cap B\cap C)=2$ より求める個数は

$n(A)-n(A\cap B)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$ △5

$=100-20-14+2=68$



答）68（個）[7点]

(4) (3)と同様にして

$n(B)=60$，$n(C)=42$，$n(B\cap C)=8$。

従って

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)=100+60+42-20-8-14+2=162$ △5

ゆえに

求める個数は

$n(U)-n(A\cup B\cup C)=300-162=138$

答）138（個）[8点]

A2　25点

(1) 720通り [5点]

(2) 240通り [5点]

(3) C，Dの中から1個を選ぶ方法は $_2C_1=2$ 通り。△2

その各々に対して，残り4個から2個を選べばよいから $_4C_2=6$ 通り △4

よって求める選び方は

$2\times 6=12$ 通り

答）12通り [7点]

(4) 最初の文字がAまたはBのときの並べ方は $2\times 5!=240$ 通り △4

最初の文字がCで2番目の文字がAのときの並べ方は $4!=24$ 通り △4

このあとの並べ方は

CBADEF，CBADFE，CBAEDF となり

CBAEDFは

$240+24+3=267$（番目）

答）267番目 [8点]

A3　25点

(1) $PA=2\sqrt{6}$ [5点]

(2) $AC=2\sqrt{3}$ [5点]

(3) 点Dは PC を直径とする円周上より，$\angle PDC=90°$

また，円の中心から弦に引いた垂線は弦を二等分するから

$DQ=\frac{1}{2}RQ=\frac{1}{2}(PR-PQ)=\frac{1}{2}(8-3)=\frac{5}{2}$ △4

よって $PD=DQ+QP=\frac{5}{2}+3=\frac{11}{2}$

答）$PD=\frac{11}{2}$ [7点]

(4)

（証）$\angle APS=\angle DPA$（共通）―①　△1

PA，PBは点Pから円への接線より

$PA=PB$。$\triangle PAB$は二等辺三角形

より $\angle PAB=\angle PBA$ ―②

また，PCを直径とする円の $\overset{\frown}{AP}$ に

対する円周角より $\angle PDA=\angle PBA$ ―③

②，③より $\angle PAB=\angle PDA$

ゆえに $\angle PAS=\angle PDA$ ―④　△4

①，④より2角が等しいので

$\triangle APS\backsim\triangle DPA$　△5

（終）

これより

$PS:PA=PA:PD$

$PS:2\sqrt{6}=2\sqrt{6}:\frac{11}{2}$

$\frac{11}{2}PS=24$

$PS=\frac{48}{11}$

答）$PS=\frac{48}{11}$ [8点]

B1　25点

(1) $a_n=3^{n-1}$ [5点]

(2) $b_n=2n-1$ [5点]

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(2k+1)^2-1}=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{4k^2+4k}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$ △3

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{20}{21}=\frac{5}{21}$

答）$\frac{5}{21}$ [7点]

(4) $\displaystyle S=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$ とおく。

$\displaystyle S=\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)3^{k-1}$

$S=1+3\cdot 3+5\cdot 3^2+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$

$-)\ 3S=\quad 1\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-1}+(2n-1)\cdot 3^n$

$-2S=1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots+2\cdot 3^{n-1}-(2n-1)\cdot 3^n$ △3

$-2S=1+\frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot 3^n$

$-2S=1+3^n-3-(2n-1)\cdot 3^n$

$-2S=(-2n+2)\cdot 3^n-2$

$S=(n-1)\cdot 3^n+1$

答）$S=(n-1)\cdot 3^n+1$ [8点]

B2　25点

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ [5点]

(2) $\sqrt{13}$ [5点]

(3)・$AC:CB=t:1-t$ とおくと

$\overrightarrow{OC}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ △2

・$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ より

$(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\left\{\frac{1}{2}\vec{b}-(1-t)\vec{a}-t\vec{b}\right\}\cdot\vec{b}=0$

$\left(\frac{1}{2}-t\right)|\vec{b}|^2-(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ より

$\left(\frac{1}{2}-t\right)\times 16-(1-t)\times 6=0$

$8-16t-6+6t=0$

$t=\frac{1}{5}$ △5

よって

$AC:CB=\frac{1}{5}:\frac{4}{5}=1:4$

答）$AC:CB=1:4$ [7点]

(4)・辺ODは $\angle AOB$ の二等分線より

$AD:DB=OA:OB=3:4$

よって $\overrightarrow{OD}=\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}$

・3点O，E，Dは一直線上より

$\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OD}=\frac{4}{7}k\vec{a}+\frac{3}{7}k\vec{b}$ ―① △2

・$CE:EM=\alpha:1-\alpha$ とおくと

$\overrightarrow{OE}=(1-\alpha)\vec{a}+\alpha\overrightarrow{OM}$

$=(1-\alpha)\left(\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}\right)+\frac{1}{2}\alpha\vec{b}$

$=\frac{4}{5}(1-\alpha)\vec{a}+\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\alpha\right)\vec{b}$ ―② △4

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ より

①，②から

$\begin{cases}\frac{4}{7}k=\frac{4}{5}(1-\alpha) & ―③\\ \frac{3}{7}k=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\alpha & ―④\end{cases}$

③より $k=\frac{7}{5}-\frac{7}{5}\alpha$

④に代入して

$\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\alpha=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\alpha$

$\alpha=\frac{4}{9}$，③より $k=\frac{7}{9}$　どちらか一方出して △6

従って $\overrightarrow{OE}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

答）$\overrightarrow{OE}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ [8点]

鹿児島県数学教育会高校部会