【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

Ⅱ1（25点）

(1) 0 [5点]

(2) $(x-2)(x^2+3x+1)$ [5点]

(3) 組立除法より

2	1	$a-2$	$1-2a$	-2
		2	$2a$	2
	1	a	1	0

$(x-2)(x^2+ax+1)=0$ △3

$x-2=0$, $x^2+ax+1=0$

$x^2+ax+1=0$ の判別式を D とすると，

$D=a^2-4<0$ となればよい。 △5

$(a+2)(a-2)<0$

$\therefore -2<a<2$ [7点]

(4) (3)より $x=2$ …① または $x^2+ax+1=0$ …②

ここで ②の判別式を D , $g(x)=x^2+ax+1$ とおく。

題意より，

i) ②が2以外の重解をもつとき

$D=a^2-4=0$ かつ $g(2)=4+2a+1=5+2a\neq 0$

$a=\pm 2$ は条件をみたす。 △3

ii) ②が2と2以外の解をもつとき

$g(2)=5+2a=0$ かつ $D=a^2-4>0$

$a=-\frac{5}{2}$ これは条件をみたす。 △6

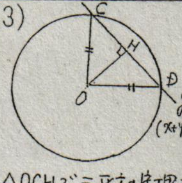
$\therefore a=\pm 2, -\frac{5}{2}$ [8点]

Ⅱ2（25点）

(1) 中心 $(2,1)$ △3
半径 $\sqrt{5-k}$ [5点]

(2) $y=x+1$ [5点]

(3)



左図のように，直線と円の交点を C, D，中心Oから直線に向かって垂線OHをひく。

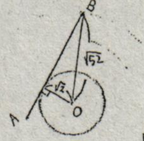
$CD=2CH=2\sqrt{3}$ $\therefore CH=\sqrt{3}$

$OH=\frac{|2+1-7|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ △3

△OCHで三平方の定理を用いる。

$(\sqrt{5-k})^2=(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2})^2$ △5 $k=-6$ ($k<5$ をみたす) [7点]

(4) 題意をみたすのは，円が線分ABに接するときから，円が点Bを通るときまでのことである。



点O(2,1)と直線 $x-y+1=0$ との距離は，

$\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ △2

$OB=\sqrt{(6-2)^2+(7-1)^2}=\sqrt{52}$ △4

よって

$\sqrt{2}\leqq\sqrt{5-k}\leqq\sqrt{52}$ をみたせばよい △6

$2\leqq 5-k\leqq 52$

$\therefore -47\leqq k\leqq 3$ ($k<5$ をみたす) [8点]

Ⅱ3（25点）

(1) $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ [5点]

(2) $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ [5点]

(3) $\sin\theta+\cos\theta=x$ より

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=x^2$

$1+2\sin\theta\cos\theta=x^2$ △2

$2\sin\theta\cos\theta=x^2-1$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2}$ △5

$y=3\cdot\frac{x^2-1}{2}-x$

$=\frac{3}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$ [7点]

(4) (3)より

$y=\frac{3}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{2}\left(x^2-\frac{2}{3}x\right)-\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{5}{3}$ △3

(2)より

$x=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

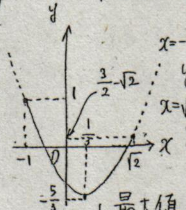
$0\leqq\theta\leqq\pi$

$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\pi+\frac{\pi}{4}$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

$-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$ △6



$x=-1$ のとき
$y=\frac{3}{2}+1-\frac{3}{2}=1$
$x=\sqrt{2}$ のとき
$y=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$

最大値 1
最小値 $-\frac{5}{3}$ [8点]

Ⅱ4（25点）

(1) -4 [5点]

(2) $\frac{\log_3 x}{2}$ or $\log_3 x^{\frac{1}{2}}$ or $\log_3\sqrt{x}$ [5点]

(3) $\log_9 x^4=4\log_9 x=4\cdot\frac{\log_3 x}{2}=2\log_3 x$ △2

$f(x)=(\log_3 x)^2-2a\log_3 x$

ここで $\log_3 x=t$ とおく。

$f(x)=t^2-2at=(t-a)^2-a^2$ △5

下に凸のグラフより

最小値 $-a^2$ [7点]

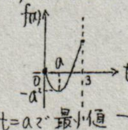
(4) (3)より $f(x)=(t-a)^2-a^2$

$1\leqq x\leqq 27$ より $\log_3 1\leqq\log_3 x\leqq\log_3 27$

$0\leqq\log_3 x\leqq 3$ つまり $0\leqq t\leqq 3$ …① △2

$a>0$ より

ア) $0<a\leqq 3$ のとき



$t=a$ で最小値 $-a^2=-3$

$a^2=3$, アより $a=\sqrt{3}$ △5

イ) $a>3$ のとき

$t=3$ で最小値 $9-6a$

$9-6a=-3$

$6a=12$

$a=2$

(イ)より不適

したがって

$a=\sqrt{3}$ [8点]

Ⅱ5（25点）

(1) $y'=3x^2-3$ [5点]

(2) $y=9x-16$ [5点]

(3) 接点を (t, t^3-3t) とおくと，接線は

$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$ △2

$\therefore y=(3t^2-3)x-2t^3$

これが B(0,16) を通るので

$16=-2t^3$

$t^3=-8$

$t^3+8=0$

$(t+2)(t^2-2t+4)=0$

t は実数より $t=-2$

$\therefore y=9x+16$ △5 [7点]

(4) 点Cにおける接線は，(3)より

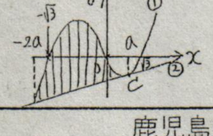
$y=(3a^2-3)x-2a^3$

ここで $(3a^2-3)x-2a^3=x^3-3x$ を解く。

$x^3-3a^2x+2a^3=0$ △2

$(x-a)^2(x+2a)=0$

$x=a, -2a$ △4



面積は

$\int_{-2a}^{a}\left[(x^3-3x)-\{(3a^2-3)x-2a^3\}\right]dx$

$=\int_{-2a}^{a}(x^3-3a^2x+2a^3)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-3a^2\frac{x^2}{2}+2a^3x\right]_{-2a}^{a}$

$=\frac{27}{4}a^4=\frac{4}{3}$

$a^4=\frac{16}{81}$ △6

$a>0$ より

$a=\frac{2}{3}$ [8点]

鹿児島県数学教育会高校部会

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

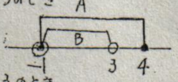
A１　25点

(1) $-1 \leqq x \leqq 4$　[5点]

(2) $\{x \mid -2 < x \leqq 4\}$　[5点]

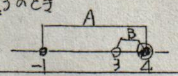
(3) $B = \{x \mid (x-3)(x-a) < 0\}$　△2

i) $a<3$のとき



$-1 \leqq a < 3$ — ①　△4

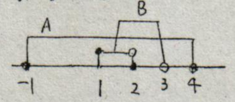
ii) $a \geqq 3$のとき



$3 \leqq a \leqq 4$ — ②　△6

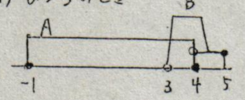
i), ii)より　$-1 \leqq a \leqq 4$　[7点]

(4) i) $a<3$のとき



$1 \leqq a < 2$ — ①　△4

ii) $a>3$のとき



$4 < a \leqq 5$ — ②

①, ②より　$1 \leqq a < 2,\ 4 < a \leqq 5$　[8点]

A２　25点

(1) $\dfrac{3}{14}$　[5点]

(2) $\dfrac{29}{56}$　[5点]

(3) 「3個の球の色が異なる」の余事象は，「3個とも同色である。」

i) 甲：赤，乙：赤赤　$\dfrac{4}{7} \times \dfrac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \dfrac{3}{49}$　△2

ii) 甲：白，乙：白白　$\dfrac{3}{7} \times \dfrac{{}_5C_2}{{}_8C_2} = \dfrac{15}{98}$　△4

$\therefore 1 - \left(\dfrac{3}{49} + \dfrac{15}{98}\right) = \dfrac{11}{14}$　[7点]

(4) i) 甲：赤2個，乙：白2個　$\dfrac{{}_4C_2}{{}_7C_2} \times \dfrac{{}_5C_2}{{}_8C_2} = \dfrac{5}{49}$　△2

ii) 甲：白2個，乙：赤2個　$\dfrac{{}_3C_2}{{}_7C_2} \times \dfrac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \dfrac{3}{196}$　△4

iii) 甲：赤白，乙：赤白　$\dfrac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_7C_2} \times \dfrac{{}_3C_1 \cdot {}_5C_1}{{}_8C_2} = \dfrac{15}{49}$　△6

i), ii), iii)は互いに排反なので

$\dfrac{5}{49} + \dfrac{3}{196} + \dfrac{15}{49} = \dfrac{83}{196}$　[8点]

A３　25点

(1) $5:4$　[5点]

(2) $\dfrac{28}{9}$　[5点]

(3) 方べきの定理より

$DA \cdot DE = DB \cdot DC$

$\dfrac{8\sqrt{10}}{9} \cdot DE = \dfrac{35}{9} \cdot \dfrac{28}{9}$　△3

$DE = \dfrac{35}{9} \cdot \dfrac{\cancel{28}^{7}}{\cancel{9}} \cdot \dfrac{\cancel{9}}{{}_{2}\cancel{8}\sqrt{10}} = \dfrac{245}{18\sqrt{10}} = \dfrac{\overset{49}{\cancel{245}}\sqrt{10}}{18 \cdot \cancel{10}_{2}} = \dfrac{49\sqrt{10}}{36}$　[7点]

(4) (証) $\triangle CAD$と$\triangle EBD$において

$\angle CAD = \angle EBD$ (CEに対する円周角)

$\angle CDA = \angle EDB$ (対頂角)

2角相等より　$\triangle CAD \backsim \triangle EBD$　(終)　△4

したがって

$AC : BE = AD : BD = \dfrac{8\sqrt{10}}{9} : \dfrac{35}{9}$

$BE = \underset{4}{AC} \times \dfrac{35}{\cancel{9}} \times \dfrac{\cancel{9}}{{}_{2}8\sqrt{10}} = \dfrac{7\sqrt{10}}{4}$　[8点]

B１　25点

(1) $a_n = n+1$　[5点]

(2) $b_n = 2^{n-2}$　[5点]

(3) $\{c_n\}$：1, 3, 6, 10, 15, 21, …

$\{a_n\}$：2, 3, 4, 5, 6　←階差数列（初項2，公差1）

$a_n = 2 + (n-1) \cdot 1 = n+1$　△2

$n \geqq 2$のとき

$c_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1 + \dfrac{n(n-1)}{2} + (n-1)$

$= \dfrac{1}{2}n(n+1)$　△5　①

ここで，①は$n=1$のとき，$\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$となり成立つ。△6

$\therefore c_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$　[7点]

(4) $\sum_{k=1}^{19} \dfrac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{19} \dfrac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{19}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$　△3

$= 2\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{20}\right)\right\}$　△6

$= 2\left(1 - \dfrac{1}{20}\right) = \cancel{2} \times \dfrac{19}{\cancel{20}_{10}} = \dfrac{19}{10}$　[8点]

B２　25点

(1) $\dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$　[5点]

(2) $-\dfrac{1}{6}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$　[5点]

(3) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 1,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$|\overrightarrow{MD}|^2 = \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MD}$　△2

$= \left(-\dfrac{1}{6}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{6}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}\right)$

$= \dfrac{1}{36}|\vec{a}|^2 - \dfrac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b} + \dfrac{4}{9}|\vec{b}|^2$　△4

$= \dfrac{1}{36} \cdot 4 + \dfrac{4}{9} = \dfrac{4+16}{36} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$

$|\overrightarrow{MD}| > 0$

$\therefore |\overrightarrow{MD}| = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$　[7点]

(4) $\overrightarrow{BE} = s\vec{a},\ \overrightarrow{ME} = t\overrightarrow{MD}$ とおく。

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} = \vec{b} + s\vec{a}$　△2

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ME} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + t\left(-\dfrac{1}{6}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}\right)$　△4

$\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a} \not\parallel \vec{b}$ より

$\begin{cases} s = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}t & \text{— ①} \\ 1 = \dfrac{2}{3}t & \text{— ②} \end{cases}$

②より　$t = \dfrac{3}{2},\ s = \dfrac{1}{4}$　△6

$\overrightarrow{OE} = \dfrac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}$

(別解) $\triangle DBE \backsim \triangle DAM$　△3

相似比が1:2より　$OA = 2BE$　つまり　$\overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{4}\vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} = \vec{b} + \dfrac{1}{4}\vec{a}$　△6

[8点]