第４９回鹿児島県高等学校２年生数学学力診断テスト

数学ＩIIＡ	略解と採点の手引き	No. 1

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

1（25点）

(1) $-24x^7y^8$　[5点]

(2) $(2x-3)(3x+4)$　[5点]

(3) $a=\sqrt{5}$ を代入すると

$|a-4|+|-a|+|a-2|$

$=|\sqrt{5}-4|+|-\sqrt{5}|+|\sqrt{5}-2|$

$=-(\sqrt{5}-4)+\sqrt{5}+\sqrt{5}-2$　4点

$=\sqrt{5}+2$　7点

[7点]

(4) $2<\sqrt{7}<3$ より $\sqrt{7}$ の整数部分は 2

よって $x=\sqrt{7}-2$　3点

$\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{3}(\sqrt{7}-2)^2+\frac{1}{\sqrt{7}+2}$

$=\frac{1}{3}(7-4\sqrt{7}+4)+\frac{\sqrt{7}-2}{7-4}$

$=\frac{1}{3}(11-4\sqrt{7})+\frac{1}{3}(\sqrt{7}-2)$　6点

$=\frac{1}{3}(9-3\sqrt{7})$

$=3-\sqrt{7}$　8点

[8点]

2（25点）

(1) $\frac{1}{2}<x<2$　[5点]

(2) $a=-1,\ 2$　[5点]

(3) 実数解をもつためには

判別式をDとすると

$D=(-a)^2-4\times1\times(a^2-3)\geqq0$

$-3a^2+12\geqq0$　4点

$a^2-4\leqq0$

$(a+2)(a-2)\leqq0$

$\therefore -2\leqq a\leqq 2$　7点

[7点]

(4) 2つの解は $x=\frac{a\pm\sqrt{-3a^2+12}}{2}$　3点

2つの解の差の絶対値は 3 なので

$\left|\frac{a+\sqrt{-3a^2+12}}{2}-\frac{a-\sqrt{-3a^2+12}}{2}\right|=3$

$\sqrt{-3a^2+12}=3$　6点

平方して

$-3a^2+12=9$

$-3a^2=-3$

$a^2=1$

$a=\pm1$　これは(3)の結果を満たす

$\therefore\ a=\pm1$　8点

[8点]

3（25点）

(1) $a=2$　[5点]

(2) $(a,\ -a^2+a+2)$　[5点]

(3) $y=(x-a)^2-a^2+a+2$ である。

頂点のy座標で正であればよい。

$-a^2+a+2>0$　（またはD<0でもよい）　4点

$a^2-a-2<0$

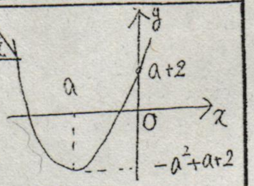
$(a+1)(a-2)<0$

$\therefore\ -1<a<2$　7点

[7点]

(4) $y=(x-a)^2-a^2+a+2$ より　3点

題意を満たすグラフは左の図のようになればよい



頂点が第３象限にあることにより $\begin{cases} a<0 \cdots ① \\ -a^2+a+2<0 \cdots ② \end{cases}$

y軸との交点が正より　$a+2>0 \cdots ③$　6点

②より　$a^2-a-2>0$ よって $a<-1,\ 2<a$

③より　$a>-2$

①②③の共通範囲をとって

$-2<a<-1$　8点

[8点]

4（25点）

(1) BD$=7$　[5点]

(2) $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$　[5点]

(3) △BCDで余弦定理を使うと

$\cos C=\frac{BC^2+CD^2-BD^2}{2BC\cdot CD}$

$=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}=-\frac{15}{30}=-\frac{1}{2}$　4点

$0^\circ<C<180^\circ$ より

$C=120^\circ$　7点

[7点]

(4) (3)の結果より $\angle A+\angle C=60^\circ+120^\circ=180^\circ$ となり

四角形ABCDは円に内接する

$\angle B+\angle D=180^\circ$ より　$\angle D=180^\circ-\angle B$　3点

△ABCで余弦定理を使うと

$AC^2=8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos B=89-80\cos B \cdots ①$

△ACDで余弦定理を使うと

$AC^2=3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos(180^\circ-B)=18+18\cos B \cdots ②$　6点

①，②より

$18+18\cos B=89-80\cos B$

$98\cos B=71$

$\therefore\ \cos B=\frac{71}{98}$　8点

[8点]

鹿児島県数学教育会高校部会

第４９回鹿児島県高等学校２年生数学学力診断テスト

数学ⅠⅡA	略解と採点の手引き	No. 2

【注意】(1) 同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
(2) 約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

Ⅱ1　25点

(1) $x=\pm\sqrt{2}i$ [5点]

(2) $-1<k<2$ [5点]

(3) $x=-1-\sqrt{2}i$ を代入して

$(-1-\sqrt{2}i)^2+2k(-1-\sqrt{2}i)+k+2=0$

$1+2\sqrt{2}i-\cancel{2}-2k-2k\sqrt{2}i+k+\cancel{2}=0$

$(1-k)+(2\sqrt{2}-2k\sqrt{2})i=0$

$(1-k)+2\sqrt{2}(1-k)i=0$　4点

この等式をみたす k の値は

$k=1$　7点

[7点]

(4) 解と係数の関係から

$\begin{cases}\alpha+\beta=-2k\\ \alpha\beta=k+2\end{cases}$　3点

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=-8k^3-3(k+2)(-2k)$

$=-8k^3+6k^2+12k=10$

$4k^3-3k^2-6k+5=0$ …①

$f(k)=4k^3-3k^2-6k+5$ とおく

$f(1)=4-3-6+5=0$ より

$k-1$ を因数に持つ　6点

よって　$f(k)=(k-1)(4k^2+k-5)$

$=(k-1)(k-1)(4k+5)$

$f(k)=0$ より

$k=1,\ -\frac{5}{4}$　8点

[8点]

Ⅱ2　25点

(1) 中心 $(2,0)$　半径 1　両方で完[5点]

(2) $\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$ と $(2,\ 1)$　両方できて[5点]

(3) ①は $mx-y=0$

②の中心から①への距離が半径より小さければよい

判別式 $D>0$ も良い

$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}<1$　4点

両辺2乗して(両辺正なので)

$\frac{4m^2}{m^2+1}<1$

$4m^2<m^2+1$

$3m^2-1<0$

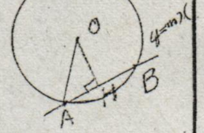
$(\sqrt{3}m+1)(\sqrt{3}m-1)<0$

m は0でない定数なので,

$-\frac{\sqrt{3}}{3}<m<0,\ 0<m<\frac{\sqrt{3}}{3}$　7点

[7点]

(4) ②の中心を O, O から直線ABに下した垂線の足をHとする。



△OAHにおいて三平方の定理:

$OH^2+AH^2=OA^2$ より　3点

$\left(\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1^2$　6点

$\frac{4m^2}{m^2+1}+\frac{1}{4}=1$

$16m^2=3(m^2+1)$

$13m^2=3$

$m^2=\frac{3}{13}$

$\therefore\ m=\pm\frac{\sqrt{39}}{13}$　8点

[8点]

Ⅱ3　25点

(1) $\frac{1}{2}$ [5点]

(2) $\frac{t^2-1}{2}$ [5点]

(3) $t=\sin x+\cos x$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ …①　4

$0\leqq x<2\pi$ より

$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ …②

よって, $-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

ゆえに, $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

[7点]

(4) $\sin x+\cos x=t,\ \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$ より

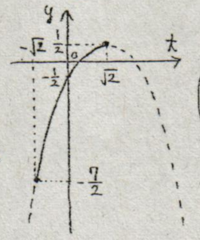
$y=\sqrt{2}t-\frac{t^2-1}{2}-1$

$=-\frac{1}{2}t^2+\sqrt{2}t-\frac{1}{2}$　3

$=-\frac{1}{2}(t^2-2\sqrt{2}t)-\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}\{(t-\sqrt{2})^2-2\}-\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}(t-\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}$



$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ より

$t=\sqrt{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$, $t=-\sqrt{2}$ のとき最小値 $-\frac{7}{2}$ をとる。　6

ここで, $t=\sqrt{2}$ のとき①より

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

②より $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore x=\frac{\pi}{4}$

また, $t=-\sqrt{2}$ のとき①より

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$

②より $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$ $\therefore x=\frac{5}{4}\pi$

ゆえに,

最大値 $\frac{1}{2}$ ($x=\frac{\pi}{4}$ のとき)

最小値 $-\frac{7}{2}$ ($x=\frac{5}{4}\pi$ のとき)

[8点]

Ⅱ4　25点

(1) -1 [5点]

(2) $0\leqq t\leqq 4$ [5点]

(3) $(\log_4 x)^2-\log_2 8x=0$

$\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right)^2-(\log_2 8+\log_2 x)=0$

$\frac{1}{4}(\log_2 x)^2-\log_2 x-3=0$　4

ここで, $\log_2 x=t$ とおくと

$\frac{1}{4}t^2-t-3=0$

$t^2-4t-12=0$

$(t+2)(t-6)=0$

$t=-2,\ 6$

よって $\log_2 x=-2,\ 6$

ゆえに $x=\frac{1}{4},\ 64$

(1つのみは6点)

[7点]

(4) $y=\frac{1}{4}(\log_2 x)^2-\log_2 x-\log_2 a$

$\log_2 x=t$ とおくと

$y=\frac{1}{4}t^2-t-\log_2 a$　3

$=\frac{1}{4}(t^2-4t)-\log_2 a$

$=\frac{1}{4}(t-2)^2-1-\log_2 a$

$0\leqq t\leqq 4$ より ($\because$ (2))

y は $t=2$ のとき最小値 $-1-\log_2 a$ をとる。　6

$y\geqq 0$ より　$-1-\log_2 a\geqq 0$

$\log_2 a\leqq -1$

底 $2>1$ より

$0<a\leqq\frac{1}{2}$

[8点]

鹿児島県数学教育会高校部会

【注意】(1) 同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
(3) 約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，1点を減じてください。

Ⅱ5　25点

(1) $f'(x) = -3x^2 + 4x$　[5点]

(2) $y = -4x + 8$　[5点]

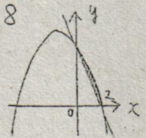
(3) 放物線と接線の交点のx座標は，

$-x^2 - 2x + 8 = -4x + 8$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0,\ 2$



$0 \leqq x \leqq 2$ では $-x^2-2x+8 \geqq -4x+8$ だから，

$S = \int_0^2 \{(-x^2-2x+8)-(-4x+8)\}dx$ △3

$= \int_0^2 (-x^2+2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$　[7点]

(4) 方程式を置き換えると，$k = x^3 - 2x^2$ △3

ここで，$f(x) = x^3 - 2x^2$ とおくと

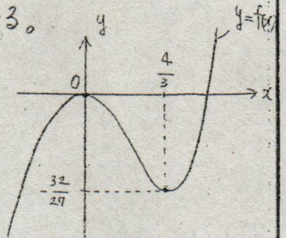
$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$= x(3x-4)$

∴ $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	0	…	$\frac{4}{3}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{32}{27}$	↗
		極大		極小	

△5



よって，

$-\frac{32}{27} < k < 0$　[8点]

A1　25点

(1) 47個　[5点]

(2) 十分条件　[5点]

(3) 逆「$xy \neq 0$ ならば $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$」

対偶「$xy = 0$ ならば $x = 0$ または $y = 0$」 △4 (1つ2点)

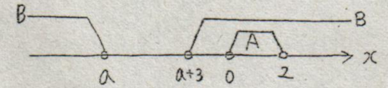
対偶で考えると，

$xy = 0 \underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} x = 0$ または $y = 0$

よって，必要十分条件　[7点]

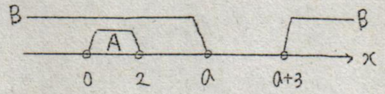
(4) $A = \{x \mid 0 < x < 2\}$，$B = \{x \mid x < a,\ a+3 < x\}$ △3

(i)



$a + 3 \leqq 0$　∴ $a \leqq -3$

(ii)



$2 \leqq a$

(i)，(ii)のどちらかまでできて △5

(i)，(ii)より　$a \leqq -3,\ 2 \leqq a$　[8点]

A2　25点

(1) 120(通り)　[5点]

(2) 48(通り)　[5点]

(3) 母音 a，e のいずれかを選ぶ方法は2通り。

それぞれに対して，残り3個から2個選ぶ方法が

${}_3C_2 = 3$(通り) △4

よって，求める選び方は，

$2 \times 3 = 6$(通り)　[7点]

(4) 最初の文字が a または b のとき，その並べ方は

$2 \times 4! = 48$(通り) △3

最初の文字が c で2番目が a のとき，その並べ方は

$3! = 6$(通り) △6

cbade は cbaed の前なので

$48 + 6 + 1 = 55$(番目)　[8点]

A3　25点

(1) $\frac{9}{4}$　[5点]

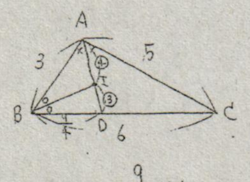
(2) $4 : 3$　[5点]

(3) $AI : ID = 4 : 3$ より

$\triangle IBD = \frac{3}{7}\triangle ABD$ △4

また，$BD : DC = 3 : 5$ より

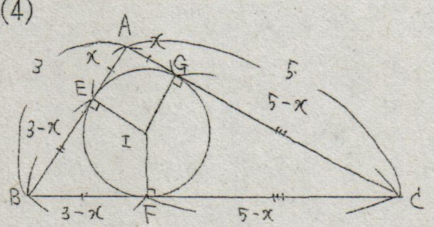
$\triangle ABD = \frac{3}{8}\triangle ABC$



よって，

$\triangle IBD = \frac{3}{7} \times \frac{3}{8}\triangle ABC = \frac{9}{56}\triangle ABC$　∴ $\frac{9}{56}$倍　[7点]

(4)



$AE = x$，点Iから線分BC，CAに垂線を引き，交点をそれぞれF，Gとする。$AE = AG = x$ なので

$BE = BF = 3 - x$，$CG = CF = 5 - x$ △3

$BC = 6$ より

$(3-x) + (5-x) = 6$ △6

$x = 1$　∴ $AE = 1$　[8点]