第４８回鹿児島県高等学校２年生数学学力診断テスト

数学ⅠⅡＡ	略解と採点の手引き	No. 1

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。

(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

Ｉ１　25点

(1) $-108x^{13}y^{8}$ [5点]

(2) $(2x-1)(x+3)$ [5点]

(3)
解 与式 $=2|2-\sqrt{2}|+|2-\sqrt{2}-1|$

$=2(2-\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})$ 4

$=4-2\sqrt{2}-1+\sqrt{2}$

$=3-\sqrt{2}$ …(答)

[7点]

(4)
解 $2<\sqrt{5}<3$ より

$3<\sqrt{5}+1<4$

$3<x<4$

よって x の整数部分

$a=3$ 2

また，$b=(\sqrt{5}+1)-3$

$=\sqrt{5}-2$ 4

したがって，

$a+b^2=3+(\sqrt{5}-2)^2$

$=3+5-4\sqrt{5}+4$

$=12-4\sqrt{5}$ …(答)

[8点]

Ｉ２　25点

(1) $x>\dfrac{10}{3}$ [5点]

(2) $0,\ 4$ (片方のみ正解は2点を与える) [5点]

(3)
解 判別式をDとすると，$D>0$ 2

$D=\{-(a+8)\}^2-4\cdot 2\cdot(-a^2+8a)$

$=9a^2-48a+64$

$=(3a-8)^2>0$ 4

(答) $a\neq\frac{8}{3}$ のすべての実数

[7点]

(4)
解 ②を因数分解すると，

$(x-a)\{2x+(a-8)\}=0$ 2

これを解いて，

$x=a,\ \dfrac{8-a}{2}$ 5

これが異なる2つの自然数となるのは，

$a=2$ のとき，$x=2,3$

$a=4$ のとき，$x=4,2$

$a=6$ のとき，$x=6,1$

(答)

$a=2$ のとき $x=2,3$

$a=4$ のとき $x=2,4$

$a=6$ のとき $x=1,6$

[8点]

Ｉ３　25点

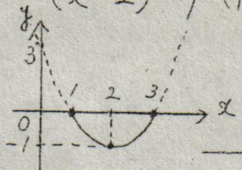
(1) $(1,\ 2)$ [5点]

(2) $a<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<a$ [5点]

(3)
解 $a=2$ を①に代入して，

$y=x^2-4x+3$

$=(x-2)^2-1\ (1\leqq x\leqq 3)$



グラフより

(答)

最大値 $0\ (x=1,3)$

最小値 $-1\ (x=2)$

3

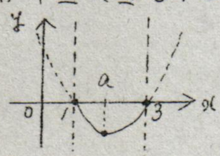
[7点]

(4)
解 $y=(x-a)^2-a^2+3$

$(1\leqq x\leqq 3)$

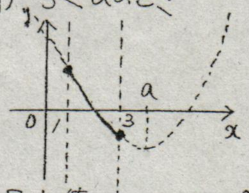
軸：$x=a\ (a\geqq 1)$ より 2

(i) $1\leqq a\leqq 3$ のとき



最小値 $-a^2+3\ (x=a)$ 5

(ii) $3<a$ のとき



最小値 $12-6a\ (x=3)$

(答) $1\leqq a\leqq 3$ のとき

$-a^2+3\ (x=a)$

$3<a$ のとき $12-6a\ (x=3)$

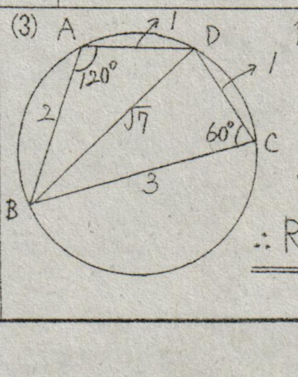
[8点]

Ｉ４　25点

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ [5点]

(2) $\sqrt{7}$ [5点]

(3)



解 △ABDにおいて正弦定理より

$\dfrac{\sqrt{7}}{\sin 120^\circ}=2R$ 4

$\sqrt{7}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{2}=R$

$\therefore R=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ …(答)

[7点]

(4)
解 四角形ABCDは円に内接しているので

$\angle BCD=60^\circ$

△BCDにおいて余弦定理より，

$(\sqrt{7})^2=1^2+BC^2-2\times 1\times BC\times\cos 60^\circ$ 2

$BC^2-BC-6=0$

$(BC-3)(BC+2)=0$

$BC>0$ より，(答) $BC=3$ 4

また，

$\square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin 120^\circ$

$+\frac{1}{2}\times 1\times 3\times\sin 60^\circ$ 6

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$ …(答)

[8点]

鹿児島県数学教育会高校部会

第４８回鹿児島県高等学校２年生数学学力診断テスト

数学ⅠⅡA	略解と採点の手引き	No. 2

【注意】(1) 同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
(2) 約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

Ⅱ1 (25点)

(1) -5 [5点]

(2) -12 [5点]

(3) 解) $f(x)=x^3+2x^2-13x+10$ とおく。

$f(1)=0$ より，$f(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。 3

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -13 & 10 \\ & & 1 & 3 & -10 \\ \hline & 1 & 3 & -10 & 0 \end{array}$$

したがって，

$f(x)=(x-1)(x^2+3x-10)$ 5

$=(x-1)(x+5)(x-2)$ …(答) [7点]

(4) 解) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=\frac{1}{2}$ 2

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=3^2-2\times\frac{1}{2}$

$=8$ 5

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=3^3-3\times\frac{1}{2}\times3$

$=\frac{45}{2}$

(答) $\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=\frac{1}{2}$

$\alpha^2+\beta^2=8$

$\alpha^3+\beta^3=\frac{45}{2}$ [8点]

Ⅱ2 (25点)

(1) $(4,0)$ [5点]

(2) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ [5点]

(3) 解) ②を①に代入して，

$(1+m^2)x^2-8x+12=0$ 2

判別式をDとすると，

$\frac{D}{4}=(-4)^2-(1+m^2)\times12$

$=-12m^2+4=0$ 4

$3m^2-1=0$

(答) $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

別解) 円①の中心$(4,0)$から直線② $mx-y=0$ までの距離 $d=2$ となればよいので，

$d=\frac{|4m|}{\sqrt{m^2+1}}=2$ 4

$16m^2=4(m^2+1)$

$12m^2=4$

(答) $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ [7点]

(4) 解) $Q(X,Y)$ とおくと，Qは OP の中点より

$P(2X,2Y)$ とおける。 2

点Pは円①上の点より，

$(2X)^2+(2Y)^2-8\cdot2X+12=0$

$4X^2+4Y^2-16X+12=0$

$X^2+Y^2-4X+3=0$

$\therefore (X-2)^2+Y^2=1$ 5

したがって，

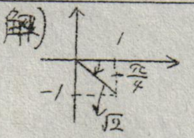
(答) $(x-2)^2+y^2=1$ で 中心$(2,0)$，半径1の円となる。 [8点]

Ⅱ3 (25点)

(1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ [5点]

(2) $\frac{1-t^2}{2}$ [5点]

(3) 解)



$t=\sin\theta-\cos\theta$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ 4

ここで，$0\leqq\theta<2\pi$ より

$-1\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$

$\therefore -\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

(答) $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ [7点]

(4) 解)

$y=2t+(1-t^2)+1$

($\because \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$)

$=-t^2+2t+2$

$=-(t-1)^2+3$ 2

$(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$

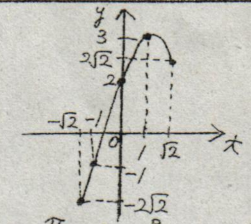
$y=f(t)$ とすると，

最大値 $f(1)=3$

このとき，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$ より



$\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$，$\pi$

最小値 $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$ 5

このとき，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

同様にして，$\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore \theta=\frac{7}{4}\pi$ [8点]

(答) 最大値 3 $\left(\theta=\frac{\pi}{2},\pi\right)$

最小値 $-2\sqrt{2}$ $\left(\theta=\frac{7}{4}\pi\right)$

Ⅱ4 (25点)

(1) 3 [5点]

(2) $-1\leqq t\leqq3$ [5点]

(3) 解)

$\log_4 2x=\frac{\log_2 2x}{\log_2 4}$

$=\frac{\log_2 2+\log_2 x}{2}$

$=\frac{1+\log_2 x}{2}$ 3

よって，$y=(\log_2 x)^2-8\left(\frac{1+\log_2 x}{2}\right)$

$=(\log_2 x)^2-4\log_2 x-4$

$\log_2 x=t$ より，

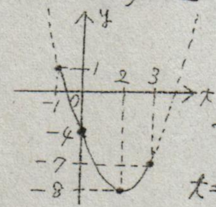
(答) $y=t^2-4t-4$ [7点]

(4) 解) (3)より

$y=t^2-4t-4$

$=(t-2)^2-8$

$(-1\leqq t\leqq3)$ 2



グラフより

最大値 1

このとき，

$t=\log_2 x=-1$

$\therefore x=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq8\right.$ に適する。$\left.\right)$

最小値 -8 5

このとき，

$t=\log_2 x=2$

$\therefore x=2^2=4$

$\left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq8\right.$ に適する。$\left.\right)$

(答) 最大値 1 $\left(x=\frac{1}{2}\right)$

最小値 -8 $(x=4)$ [8点]

鹿児島県数学教育会高校部会

第48回鹿児島県高等学校2年生数学学力診断テスト | 数学Ⅰ Ⅱ A | 略解と採点の手引き | No. 3

【注意】(1) 同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
(3) 約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，1点を減じてください。

Ⅱ5 (25点)

(1) $f'(x)=3x^2-3$ [5点]

(2) $y=9x+16$ [5点]

(3)
解) 2つのグラフの交点のx座標を求めると

$x^2+10x+14=9x+16$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$ ∴ $x=-2,\ 1$ △2

$-2\leqq x\leqq 1$ のとき $9x+16\geqq x^2+10x+14$

求める面積をSとすると

$S=\int_{-2}^{1}\{(9x+16)-(x^2+10x+14)\}dx$

$=-\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx$ △4

$=-\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx$

$=-\{-\frac{1}{6}(1+2)^3\}$

$=\frac{9}{2}$ …(答) [7点]

(4) 解) 与式より $x^3-3x=a$

$\begin{cases} y=x^3-3x & \cdots ① \\ y=a & \cdots ② \end{cases}$

求める個数は①, ②の共有点の個数に一致する。

①について

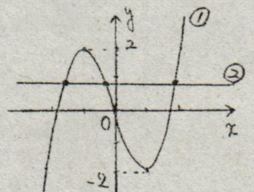
$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると $x=\pm1$

x		-1		1	
y'	+	0	−	0	+
y	↗	極大 2	↘	極小 −2	↗

△4

yの増減は左下表のとおり



よって①と②が3個の共有点をもつのは

$-2<a<2$ …(答) [8点]

A1 (25点)

(1) 50(個) [5点]

(2) 必要条件 [5点]

(3) 解)

(逆) $x<1$ または $y<1$ であるならば，$x+2y<3$ である。

(裏) $x+2y\geqq3$ であるならば $x\geqq1$ かつ $y\geqq1$ である。

(対偶) $x\geqq1$ かつ $y\geqq1$ であるならば $x+2y\geqq3$ である。

(逆，裏 → 各2点ずつ
対偶 → 3点) [7点]

(4) 解) $A=\{1, 2, 3, 5\}$

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

より，4はBの要素であるから

$a^2=4$ または $2a-1=4$ △2

$a^2=4$ より $a=\pm2$

aは1の自然数より $a=2$

このとき $2a-1=4-1=3$ となり条件をみたす。△3

$2a-1=4$ のとき $a=\frac{5}{2}$

これは自然数ではないので不適

(答) $a=2$ [8点]

A2 (25点)

(1) $\frac{5}{42}$ [5点]

(2) $\frac{5}{14}$ [5点]

(3) 解) $1-\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}$ △4

$=1-\frac{4}{84}$

$=\frac{20}{21}$ …(答) [7点]

(4) 解) 白球がX個含まれる確率をP(X)とする。

X	0	1	2	3	計
P(X)	$\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{10}{84}$	$\frac{{}_5C_2\times{}_4C_1}{{}_9C_3}=\frac{40}{84}$	$\frac{{}_5C_1\times{}_4C_2}{{}_9C_3}=\frac{30}{84}$	$\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{4}{84}$	1

したがって求める期待値をE(X)とすると，

$E(X)=0\times\frac{10}{84}+1\times\frac{40}{84}+2\times\frac{30}{84}+3\times\frac{4}{84}$ △5

$=\frac{112}{84}$

$=\frac{4}{3}$

(答) $\frac{4}{3}$(個) [8点]

A3 (25点)

(1) 3 : 4 [5点]

(2) $\sqrt{3}$ [5点]

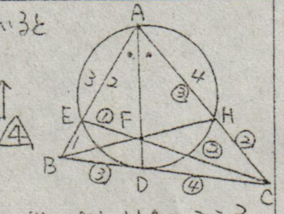
(3) 解) △ABCにチェバの定理を用いると

$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CH}{HA}=1$ △4

$\frac{\cancel{3}\,1}{1}\cdot\frac{3}{2\cancel{4}}\cdot\frac{CH}{HA}=1$

∴ $\frac{CH}{HA}=\frac{2}{3}$

よって CH : HA = 2 : 3



(答) CH : HA = 2 : 3 [7点]

(4) 解) △AECと直線BHにメネラウスの定理を用いると

$\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EF}{FC}\cdot\frac{CH}{HA}=1$ △3

$\frac{3}{1}\cdot\frac{EF}{FC}\cdot\frac{2}{3}=1$

∴ $\frac{EF}{FC}=\frac{1}{2}$

よって EF : FC = 1 : 2 …(答) △5

また △ABCの面積をSとすると

$\triangle BCE=\frac{1}{3}S$

$\triangle DCE=\frac{4}{7}\triangle BCE=\frac{4}{21}S$

$\triangle EDF=\frac{1}{3}\triangle DCE$

$=\frac{4}{63}S$

よって $\triangle ABC:\triangle EDF$

$=S:\frac{4}{63}S$

$=63:4$ …(答) [8点]

鹿児島県数学教育会高校部会