第３２回鹿児島県高等学校３年生数学学力診断テスト

数学II・B	略解と採点の手引き	No. 1

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

1　20点

(1) 4　[5点]

(2) $\frac{4}{9} < x < \frac{28}{3}$　[5点]

(3) $(3,\ 2)$　[5点]

(4) $f(x) = x^2 + 3x - 5$　[5点]

II 1　20点

(1) $P(3) = 27 + 9a - 9a - 9 - 18$
$= \underline{0}$　[5点]

(2) $P(1) = 1 + a - 3a - 3 - 18 = 0$
$-2a = 20$
$a = -10$ △3

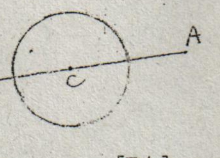
(1), (2) より
$P(x) = (x-1)(x-3)(x-6) = 0$ △5
よって 残りの解は 3 と 6　[7点]

(3) (1)より
$P(x) = (x-3)\{x^2 + (a+3)x + 6\}$ △2
よって $P(x)=0$ が重解をもつには
(i) $x^2 + (a+3)x + 6 = 0$ が $x=3$ を解にもつとき
$9 + 3a + 9 + 6 = 0$ より $a = -8$ △5
(ii) $x^2 + (a+3)x + 6 = 0$ が重解をもつとき
$D = (a+3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 0$
$a^2 + 6a - 15 = 0$
$\therefore a = -3 \pm 2\sqrt{6}$
(i)(ii)より $\underline{a = -8,\ -3 \pm 2\sqrt{6}}$　[8点]

II 2　20点

(1) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 3^2$ より
中心 $(-2,\ 1)$，半径 3　[5点]

(2) 中心をCとするとき，直線ACと円①との交点までの距離が求める最大値，最小値である。
$AC = \sqrt{(3+2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$ △3



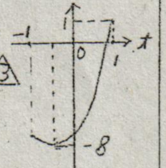
よって
最大値 $\sqrt{26} + 3$
最小値 $\sqrt{26} - 3$　[7点]

(3) 点 $P(a,\ b)$，$Q(x,\ y)$ とすると
Pは①上の点より
$(a+2)^2 + (b-1)^2 = 9$ …② △2
QはAPの中点より $x = \frac{a+3}{2}$，$y = \frac{b+2}{2}$
これより $a = 2x - 3$，$b = 2y - 2$ …③ △5
②，③より $(2x-1)^2 + (2y-3)^2 = 9$
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
よって求める軌跡は
中心 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$，半径 $\frac{3}{2}$ の円である。　[8点]

II 3　20点

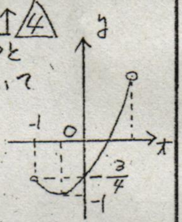
(1) $y = 2\cos\frac{2}{3}\pi + 4\cos\frac{\pi}{3} - 5$
$= -1 + 2 - 5 = \underline{-4}$　[5点]

(2) $y = 2(2\cos^2\theta - 1) + 4\cos\theta - 5$
$= 4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 7$ △2
$\cos\theta = t$ とおくと $-1 \leqq t \leqq 1$ △3
$y = 4t^2 + 4t - 7$
$= 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - 8$ △5



$t = 1$ つまり $\theta = 0$ のとき 最大値 1
$t = -\frac{1}{2}$ つまり $\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ のとき 最小値 -8　[7点]

(3) 与方程式は
$4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 4a - 3 = 0$ となる。△2
$\cos^2\theta + \cos\theta - \frac{3}{4} = a$
$\cos\theta = t$ とすると $t^2 + t - \frac{3}{4} = a$ △4
よって $y = t^2 + t - \frac{3}{4} = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$ のグラフと
$y = a$ のグラフが $-1 < t < 1$ において
共有点が2個あるとよい。△6
グラフより
$-1 < a < -\frac{3}{4}$



[8点]

II 4　20点

(1) $3^x = 3^{-x}$ より
$x = -x$ よって $\underline{x = 0}$　[5点]

(2) 相加・相乗平均より
$\frac{3^x + 3^{-x}}{2} \geqq \sqrt{3^x \cdot 3^{-x}}$
$\therefore 3^x + 3^{-x} \geqq 2$　$\therefore t \geqq 2$ △3
$9^x + 9^{-x} = (3^x)^2 + (3^{-x})^2 = (3^x + 3^{-x})^2 - 2$
$= t^2 - 2$
$\therefore y = -t^2 + 2at + 2$　[7点]

(3) (2)より $y = -(t-a)^2 + a^2 + 2$　$(t \geqq 2)$ △2
(i) $a < 2$ のとき
$t = 2$ で最大値 $4a - 2$
(2)で等号が成り立つときより $3^x = 3^{-x}$　$\therefore x = 0$ △5
(ii) $a \geqq 2$ のとき
$t = a$ で最大値 $a^2 + 2$
$3^x + 3^{-x} = a$ より
$(3^x)^2 - a(3^x) + 1 = 0$
$3^x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$
$x = \log_3 \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$

(i)，(ii)より
$a < 2$ のとき
最大値 $4a - 2$　$(x = 0)$
$a \geqq 2$ のとき
最大値 $a^2 + 2$　$\left(x = \log_3 \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$　[8点]

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

II 5　20点

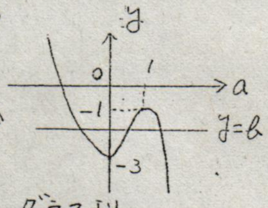
(1) $y' = 6x^2 - 3$
$x = 1$ のとき $y' = 3$ より
$y + 1 = 3(x - 1)$
$y = 3x - 4$
[5点]

(2) $x = a$ のとき $y' = 6a^2 - 3$
∴ $y - (2a^3 - 3a) = (6a^2 - 3)(x - a)$ △3
点 $(1, b)$ を通るので
$b - 2a^3 + 3a = 6a^2 - 3 - 6a^3 + 3a$
$b = -4a^3 + 6a^2 - 3$
[7点]

(3) $f(a) = -4a^3 + 6a^2 - 3$ とおく。
題意を満たすには，$y = f(a)$ と $y = b$ との共有点が３つであればよい。
$f'(a) = -12a^2 + 12a$
$= -12a(a - 1)$ △3

a	…	0	…	1	…
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(a)$	↘	-3	↗	-1	↘

△6



グラフより
$-3 < b < -1$
[8点]

B 1　20点

(1) $a_3 = a + 2d = 16$
$a_9 = a + 8d = 34$
∴ $6d = 18$
$d = 3$，∴ $a = 10$
よって
$a_n = 3n + 7$
[5点]

(2) $n = 1$ のとき $b_1 = S_1 = 2 - 1 = 1$ △2
$n \geqq 2$ のとき
$b_n = S_n - S_{n-1}$
$= 2n^2 - n - \{2(n-1)^2 - (n-1)\}$
$= 4n - 3$ △6
$n = 1$ のときも成り立つ --> (吟味すること)
∴ $b_n = 4n - 3$
[7点]

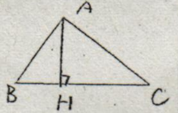
(3) $\{a_n\}$：10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, …
$\{b_n\}$：1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, … より
共通な数は 13, 25, 37, …　となる。△3
これは初項13，公差12の
等差数列だから
一般項 $12n + 1$
$12n + 1 \leqq 200$
$n \leqq \frac{199}{12} \fallingdotseq 16.6$ より
第16項は193より
初項から第16項までの和 △6
$\frac{16 \times (13 + 193)}{2} = 8 \times 206$
$= 1648$
[8点]

B 2　20点

(1) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ$
$= -1$
[5点]

(2) 角の二等分線の性質より
$BD : DC = 1 : 2$
∴ $\overrightarrow{AD} = \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ △3
$|\overrightarrow{AD}|^2 = \left|\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right|^2$
$= \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{1}{9}|\vec{c}|^2$
$= \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$
$|\overrightarrow{AD}| \geqq 0$ より
$|\overrightarrow{AD}| = \frac{2}{3}$
[7点]

(3) $BH : HC = t : (1 - t)$ とすると
$\overrightarrow{AH} = (1 - t)\vec{b} + t\vec{c}$ △3



$AH \perp BC$ より $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
$\{(1 - t)\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$ △5
$(1 - t)\vec{b}\cdot\vec{c} - (1 - t)|\vec{b}|^2 + t|\vec{c}|^2 - t\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$
$-1 + t - 1 + t + 4t + t = 0$
$7t = 2$　∴ $t = \frac{2}{7}$
よって $\overrightarrow{AH} = \frac{5}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}$
[8点]