第３１回鹿児島県高等学校３年生数学学力診断テスト

数学Ⅱ・Ｂ	略解と採点の手引き	No. 1

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。

(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

1　20点

(1) $a = 3$, $b = -1$　（片方のみ正解は３点）　[5点]

(2) 14　[5点]

(3) $y = \frac{1}{5}$　[5点]

(4) $\fallingdotseq 1$　[5点]

Ⅱ 1　20点

(1) $x = 1$を代入して

$2 - 11 + 2a + 15 - 6a = 0$

$6 - 4a = 0$　　$\therefore \underline{a = \frac{3}{2}}$　[5点]

(2) ①をaについて整理すると

$(2x-6)a + (2x^3 - 11x^2 + 15x) = 0$ ↑3点

$2(x-3)a + x(2x-5)(x-3) = 0$

$(x-3)\{x(2x-5) + 2a\} = 0$

したがって　①はaの値に関係なく

$x - 3 = 0$

より実数解$x = 3$をもつ

$\therefore \underline{x = 3}$ //…7点　[7点]

(3) 方程式①が異なる２つの実数解をもつとき(2)より

i) $2x^2 - 5x + 2a = 0$が$x = 3$以外の重解をもつ

ii) $2x^2 - 5x + 2a = 0$が$x = 3$と他の解をもつ

の２つの場合である。　↑2点

$2x^2 - 5x + 2a = 0$が重解をもつとき

判別式$D = 25 - 16a = 0$より　$a = \frac{25}{16}$ …②

$2x^2 - 5x + 2a = 0$が$x = 3$を解にもつとき

$18 - 15 + 2a = 0$より　$a = -\frac{3}{2}$ …③ ↑片方だけで4点

i), ii)をみたすのは②，③より

$\underline{a = -\frac{3}{2},\ \frac{25}{16}}$ //　[8点]

Ⅱ 2　20点

(1) kについて整理すると

$k(x+2) + y = 0$

$y = -k(x+2)$

このときこの直線は kの値によらず点$(-2, 0)$を通る。

$\therefore \underline{A(-2, 0)}$ //　[5点]

(2) 円②は$(x-1)^2 + y^2 = 2^2$より

中心$(1, 0)$，半径2

点と直線の距離の公式より

$\frac{|k + 2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$ ↑2点

$|3k| = 2\sqrt{k^2+1}$

$9k^2 = 4k^2 + 4$

$5k^2 = 4$

$k = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ↑5点

$k > 0$より

$\underline{k = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$ //　[7点]

(3) 点$P(X, Y)$　点$Q(x, y)$とすると

$x = \frac{-4+X}{3}$, $y = \frac{Y}{3}$ ↑2点

これより　$X = 3x + 4$, $Y = 3y$

ここで点Pは円②上にあるので

$(X-1)^2 + Y^2 = 2^2$ ↑4点

これに代入して

$(3x+3)^2 + (3y)^2 = 4$

$9(x+1)^2 + 9y^2 = 4$

$(x+1)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$

$\therefore$ 円$\underline{(x+1)^2 + y^2 = \frac{4}{9}}$ // ↑6点

△OAQにおいて

底辺をOAとすると，

点Qからx軸に下ろした

垂線QHの長さが

最大のとき面積も最大

となる。（QHが半径と一致）

$QH = \frac{2}{3}$のとき

$S = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3} = \underline{\frac{2}{3}}$ // ↑8点　[8点]

Ⅱ 3　20点

(1) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

$\underline{= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)}$ //　[5点]

(2) (1)より

$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$より

$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$

$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ ↑4点

$\underline{\theta = \pi,\ \frac{5}{3}\pi}$ //　[7点]

(3) $a\sin\theta + \cos\theta$

$= \sqrt{a^2+1}\sin(\theta + \alpha)$

ただし，$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ ↑2点

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$より

$\alpha \leqq \theta + \alpha \leqq \frac{\pi}{2} + \alpha$

i) $a > 1$のとき

$\theta + \alpha = \alpha$　すなわち$\theta = 0$のとき

$\underline{最小値\ 1}$ //

ii) $a = 1$のとき

$\alpha = \frac{\pi}{4}$より

$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$　すなわち$\theta = 0,\ \frac{\pi}{2}$のとき

$\underline{最小値\ 1}$ //

iii) $a < 1$のとき

$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha$　すなわち$\theta = \frac{\pi}{2}$のとき

$\underline{最小値\ a}$ //

場合分けに各2点　[8点]

Ⅱ 4　20点

(1) $y = \log_3 9 \cdot \log_3 81$

$= 2 \times 4 = \underline{8}$ //　[5点]

(2) $\log_3 x = t$

$y = (\log_3 x + \log_3 3)(\log_3 x + \log_3 27)$ ↑4点

$= (t+1)(t+3)$ ↑これでも可

$= t^2 + 4t + 3$

$\therefore \underline{y = t^2 + 4t + 3}$ //　[7点]

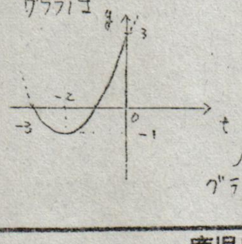
(3) 底3は1より大きいので

$\log_3 \frac{1}{27} \leqq \log_3 x \leqq \log_3 1$

$-3 \leqq t \leqq 0$ —① ↑2点

$y = (t+2)^2 - 1$ —②

グラフは



グラフまでで4点

これより　$y = k$となる解が

1個であるためには

$y = (t+2)^2 - 1$　と

$y = k$の共有点が1つであればよい

$\therefore \underline{k = -1,\ 0 < k \leqq 3}$ //　[8点]

鹿児島県数学教育会高校部会

【注意】(1)　同値な解答については，下記の配点に準じて採点してください。
(2)　約分や有理化していないもの，根号内の平方因数を出していないもの等は，１点を減じてください。

Ⅱ 5　20点

(1) $f(x)=3x^2-12x+13$ とおくと，$f'(x)=6x-12$

$f'(3)=6$ より　求める接線の方程式は

$y-4=6(x-3)$　$\therefore \underline{y=6x-14}$ //　[5点]

(2) $y=3(x^2-4x)+13$

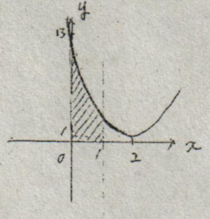
$=3(x-2)^2+1$

$\int_0^1 (3x^2-12x+13)\,dx$　↑2点

$=\left[x^3-6x^2+13x\right]_0^1$　↑4点

$=1-6+13$

$=\underline{8}$ //



[7点]

(3) $(t,\ 3t^2-12t+13)$ における接線の方程式は

$y=(6t-12)x-3t^2+13$　↑2点

(2)より 放物線①と接線および直線 $x=1$ で囲まれた面積が4となればよい

$\int_0^1 \{(3x^2-12x+13)-(6tx-12x-3t^2+13)\}dx=4$　↑4点

$\int_0^1 (3x^2-6tx+3t^2)\,dx=4$

$\left[x^3-3tx^2+3t^2x\right]_0^1=4$

$1-3t+3t^2=4$

$3t^2-3t-3=0$

$t^2-t-1=0$

$t=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$

$\therefore t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　↑6点

$0<t<2$ より

$\underline{t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ //

[8点]

B 1　20点

(1) 公差を d とすると

$a_4-a_2=2d$ より

$2d=16-8$　$\therefore d=4$　$\therefore$ 公差 $\underline{4}$ //　[5点]

(2) 初項を a，公比を r とすると

$a_2=ar$，$a_4=ar^3$ より

$\begin{cases} ar=8 & \text{—①} \\ ar^3=16 & \text{—②} \end{cases}$　↑2点

②÷①より

$r^2=2$

$\therefore r=\pm\sqrt{2}$

①より $r=\sqrt{2}$ のとき $a=4\sqrt{2}$

$r=-\sqrt{2}$ のとき $a=-4\sqrt{2}$

これより

$\underline{a_n=4\cdot\sqrt{2}^{\,n} \text{ または } a_n=4\cdot(-\sqrt{2})^n}$ //

（片方だけで4点）[7点]

(3) 初項を a，公差を d とすると

(1)より $d=4$　また $a_2=a+d=8$ より $a=4$　↑2点

したがって $S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 4+(n-1)\cdot 4\}$　↑4点

$=2n(n+1)$

これより $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$　↑6点

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\underline{\frac{n}{2(n+1)}}$ //

[8点]

B 2　20点

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}=3\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=\underline{3}$ //

~~面積 $S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$~~ //

[5点]

(2) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AO}$

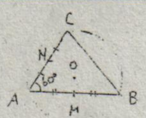
$=\frac{1}{2}\vec{b}-(s\vec{b}+t\vec{c})$

$\underline{=\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{b}-t\vec{c}}$ //

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AO}$

$=\frac{1}{2}\vec{c}-(s\vec{b}+t\vec{c})$

$\underline{=-s\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{c}}$ //



（片方で3点）

[7点]

(3) Oは外心であるから

$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{AB}$ より

$\left\{\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{b}-t\vec{c}\right\}\cdot\vec{b}=0$

$\left(\frac{1}{2}-s\right)|\vec{b}|^2-t\vec{c}\cdot\vec{b}=0$

$\frac{9}{2}-9s-3t=0$　—①

同様に $\overrightarrow{ON}\perp\overrightarrow{AC}$ より

$\left\{-s\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{c}\right\}\cdot\vec{c}=0$

$-3s+2-4t=0$　—②

①，②を解いて

$\underline{\begin{cases} s=\frac{4}{9} \\ t=\frac{1}{6} \end{cases}}$ //

①，②片方で3点

[8点]